

TESIS CARERA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS
FÍSICAS

**ENTROPÍA DE ENTRELAZAMIENTO EN TEORÍA
CUÁNTICA DE CAMPOS: CÁLCULOS EN UNA
REGIÓN CILÍNDRICA**

Leonardo Andrés Pedraza Pérez
Maestrando

Dra. M. Huerta
Director

Miembros del Jurado

Dr. G. Torroba (Instituto Balseiro - Centro Atómico Bariloche)

Dr. C. Fosco (Instituto Balseiro - Centro Atómico Bariloche)

Dra. C. Núñez (Instituto de Astronomía y Física del Espacio; Departamento de
Física – FCEN-UBA)

Diciembre de 2017

Partículas y Campos – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

a Sarah

Índice de contenidos

Índice de contenidos	ii
Resumen	iii
Abstract	iv
Introducción	1
1. Matriz densidad y entropía de von Neumann	3
1.1. Sistemas compuestos y matriz densidad reducida	3
1.2. Entropía de von Neumann y teoría cuántica de campos	5
2. Métodos de cálculo	7
2.1. Reducción dimensional	7
2.1.1. Cilindro bajo reducción dimensional	8
2.2. Método de tiempo real para un campo de bosones	9
2.2.1. Correladores para un hamiltoniano cuadrático	14
3. Campo escalar: del cilindro al disco	15
4. Campo de Maxwell en el cilindro	18
4.1. Hamiltoniano del campo de Maxwell	18
4.2. Conmutadores de los campos físicos	20
4.3. Dos campos escalares desacoplados en un potencial cuadrático	22
5. Cálculos numéricos	24
5.1. Discretización del hamiltoniano	24
5.2. Resultados para el campo escalar	26
5.3. Resultados para el campo de Maxwell	29
6. Conclusiones	34
Apéndices	36
A. Implementación numérica	37
Bibliografía	39
Agradecimientos	40

Resumen

En este trabajo se estudia la entropía de entrelazamiento o geométrica en el contexto de la teoría cuántica de campos. Particularmente, estamos interesados en la entropía del campo de Maxwell asociada a una región cilíndrica en tres dimensiones espaciales. Para abordar este problema nos dedicamos primeramente al estudio de uno más sencillo, el de un campo escalar, con el fin de afianzar los métodos numéricos y analíticos que luego implementamos en el caso más complejo del campo vectorial. Se describe de manera detallada el método empleado para el cálculo numérico de la entropía. También se revisa el método de reducción dimensional, el cual permite relacionar términos universales de la entropía de entrelazamiento del cilindro con coeficientes de la expansión de la entropía del disco en una dimensión menor. Este método se aplica para reducir el problema original de un campo conforme en un cilindro en $(3+1)$ dimensiones al de un campo masivo en un disco en $(2+1)$ dimensiones. Para el campo de Maxwell, empleando coordenadas apropiadas, se encuentra que el hamiltoniano del mismo equivale al de dos campos escalares idénticos desacoplados con un potencial cuadrático extra. Finalmente, los cálculos numéricos se realizaron sobre una red radial ya que el problema, gracias a la simetría, puede reducirse a una dimensión espacial. Mientras que para el campo escalar el coeficiente logarítmico coincide con la anomalía de traza tipo c del tensor de energía-momento, tal como se predice en la literatura [1], no sucede lo mismo para el campo de Maxwell. Esta misma discordancia fue hallada en [7] para el caso de la entropía de entrelazamiento de una región esférica, en donde el coeficiente logarítmico corresponde a la anomalía de traza tipo a .

Palabras clave: ENTROPÍA GEOMÉTRICA, TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS, CAMPO ESCALAR EN CILINDRO, CAMPO DE MAXWELL EN EL CILINDRO

Abstract

In this work we study the entanglement entropy in the context of quantum field theory. More specifically, we are interested in the entropy of a Maxwell field associated with a cylindrical region in three spatial dimensions. Firstly, we study a simpler problem, the one of a massless scalar field, in order to revise the numerical and analytical methods we will use later in the more complex case of a vector field. We describe in detail a numerical method to calculate the entropy associated to scalar fields. Also, a dimensional reduction method is reviewed. This relates universal terms of entanglement entropy in the cylinder with coefficients of the entanglement entropy expansion in a disk in a smaller dimension. This method is applied to the conformal scalar field in a cylinder in $(3+1)$ dimensions, and reduces this problem to the one of a massive scalar field in a disk in $(2+1)$ dimensions. We write the electromagnetic field in an appropriate coordinate system and find that the hamiltonian is equivalent to the one of two identical uncoupled scalar fields with an extra quadratic potential. Finally, due to the symmetry of the problem, numerical calculations are done on a radial lattice. Our result for scalar field agrees with the one predicted analytically by Solodukhin [1]. This is the anomaly type c of the energy-momentum trace. On the contrary, the logarithmic coefficient of entanglement entropy obtained for the Maxwell field doesn't agree with the anomaly. The same happens in the spherical case where conflicted results were reported in the literature [7].

Keywords: ENTANGLEMENT ENTROPY, QUANTUM FIELD THEORY, SCALAR FIELD IN CYLINDER, MAXWELL FIELD IN THE CYLINDER

Introducción

“I don’t know anything, but I do know that everything is interesting if you go into it deeply enough.”

— Richard Feynman, 1976

La entropía de entrelazamiento asociada a cierta región del espacio suscita gran interés en diversas ramas de la física, desde computación cuántica hasta física de agujeros negros. En teoría cuántica de campos, el estudio de esta cantidad así como su estructura de divergencias de carácter geométrico, resulta de gran relevancia ya que, entre otras cualidades, esta magnitud se encuentra asociada a la estructura del grupo de renormalización. Su estudio entonces nos permite alcanzar un mayor entendimiento de la naturaleza de estas teorías que son la base de sistemas más complejos, como los que se estudian en física de la materia condensada, por citar un ejemplo.

En este trabajo se estudian métodos analíticos y numéricos que permiten calcular la entropía de entrelazamiento para el campo de Maxwell libre en una región cilíndrica en (3+1) dimensiones. Para ello, en un primer momento, se estudia el caso del campo escalar conforme en la misma región, pues los resultados que se obtienen para este servirán como base para los cálculos con el campo de Maxwell.

El interés alrededor de este particular objetivo nace en la existencia de dos resultados aparentemente contradictorios referidos a la entropía del campo de Maxwell libre en una esfera. Como se verá más adelante, la entropía de entrelazamiento es una cantidad divergente y puede ser expandida en términos de un *cutoff* ultravioleta ϵ . En [1] se encuentra que el coeficiente logarítmico en la expansión de la entropía asociada a una esfera para teorías conformes en (3+1) dimensiones está dado por la anomalía de traza tipo a del tensor de energía-momento

$$g_0 = \frac{a}{90}. \quad (1)$$

Del mismo análisis que conduce al resultado anterior, se deduce que para el cilindro el coeficiente logarítmico está dado por

$$g_0 = \frac{c}{240} \frac{L}{R}, \quad (2)$$

donde c es la anomalía de traza tipo c , L la longitud del cilindro y R su radio. Cálculos explícitos para escalares y fermiones, con distintos métodos, confirman este resultado en el caso de la esfera [2–4] y el cilindro [5]. De manera más general, en [6] se presenta una prueba que valida este resultado para todas las dimensiones espacio-temporales pares en la esfera.

Para el campo de Maxwell, sin embargo, en (3+1) dimensiones, de acuerdo a los

cálculos empleados en [2, 3] e incluso [7], en donde se testean los resultados analíticos desde otra perspectiva, no se obtiene el resultado esperado para el coeficiente logarítmico. Hasta el momento no existe una explicación cerrada para estos resultados conflictivos. De ahí que explorar la geometría del cilindro resulte de interés, en vistas de clarificar si también en este caso se obtienen resultados distintos a los previstos.

Capítulo 1

Matriz densidad y entropía de von Neumann

Una manera de definir un estado general en mecánica cuántica es a través de un operador ρ definido positivo, autoadjunto, de traza $\text{Tr}(\rho) = 1$, que satisface

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A) \quad (1.1)$$

para todo operador autoadjunto A que actúa sobre un determinado espacio de Hilbert \mathcal{H} , con $\langle A \rangle$ el valor de expectación de A en el estado. El operador ρ así definido se llama operador densidad y contiene toda la información relacionada con el estado del sistema.

Si ρ es un proyector unidimensional, es decir que $\rho^2 = \rho$, se satisfacen las condiciones anteriores y se dice que el estado es puro. De lo contrario, se dice que es un estado mezcla. Entonces, de aquí se desprende que un estado general de un sistema cuántico siempre puede escribirse con un operador densidad de la forma

$$\rho = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (1.2)$$

con los $|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ proyectores unidimensionales no necesariamente ortogonales con $\lambda_i \geq 0$ y $\sum_i \lambda_i = 1$. No es difícil ver que $\rho^2 \neq \rho$ si ρ es de la forma (1.2) con más de un término en la suma. La expresión (1.2) describe el estado cuántico de un sistema formado por un ensemble de estados puros en proporciones bien definidas, dadas por los λ_i .

1.1. Sistemas compuestos y matriz densidad reducida

Considérese un sistema compuesto de dos partes \mathcal{A} y \mathcal{B} con un espacio de Hilbert total que se puede escribir como $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$. La matriz densidad para este sistema es de la forma general

$$\rho = \sum_n \lambda_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|,$$

con $|\psi_n\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$,

$$|\psi_n\rangle = \sum_{ij} a_{ij}^n |\phi_i\rangle_A \otimes |\chi_j\rangle_B,$$

$|\phi_i\rangle_A$ y $|\chi_j\rangle_B$ elementos de una base ortonormal de \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B respectivamente. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{nijkl} \lambda_n a_{ij}^n a_{lk}^{n*} (|\phi_i\rangle_A \otimes |\chi_j\rangle_B) (\langle\phi_k|_A \otimes \langle\chi_l|_B), \\ \rho &= \sum_{nijkl} \lambda_n a_{ij}^n a_{lk}^{n*} (|\phi_i\rangle_A \langle\phi_k|_A) \otimes (|\chi_j\rangle_B \langle\chi_l|_B). \end{aligned}$$

Supongamos que solo la parte A es de interés o solo esta parte es accesible para el observador. Este subsistema estará descrito completamente por una matriz densidad reducida ρ_A que se obtiene al trazar parcialmente ρ sobre los estados de \mathcal{H}_B . Formalmente esto es

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_B}(\rho), \\ \rho_A &= \sum_{nik} \lambda_n \left(\sum_j a_{ij}^n a_{jk}^{n*} \right) |\phi_i\rangle_A \langle\phi_k|_A. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Si el estado original era puro, esto es que la suma sobre n contara con un único término, vemos que ρ_A describe un estado mezcla dado que la suma entre paréntesis resulta en coeficientes extradiagonales de la matriz densidad.

Por otro lado, siempre es posible escribir la matriz densidad ρ_A de un estado mezcla general, como la traza parcial de un estado puro perteneciente a un sistema más grande. Como ρ_A es un operador autoadjunto, definido positivo y normalizado, siempre tiene una descomposición espectral

$$\rho_A = \sum_i \lambda_i |i\rangle_A \langle i|_A, \quad \lambda_i > 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1.$$

Si se tienen en cuenta autoestados con autovalores nulos, el conjunto de los $|i\rangle_A$ se puede extender hasta formar una base completa para \mathcal{H}_A y siempre pueden ser tomados ortogonales. Considérese un espacio \mathcal{H}_B isomorfo a \mathcal{H}_A . Sea ρ_B una matriz densidad con los mismos autovalores no nulos λ_i y multiplicidades que ρ_A . Los autoestados $|i\rangle_B$ de ρ_B igualmente pueden tomarse ortogonales y extenderse hasta formar una base de \mathcal{H}_B . La multiplicidad de los autovalores nulos puede o no ser la misma que la de ρ_A .

Considérese $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ tal que

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |i\rangle_A \otimes |i\rangle_B.$$

La matriz densidad

$$\begin{aligned} \rho &= |\psi\rangle \langle\psi| \\ \rho &= \sum_{ij} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} (|i\rangle_A \langle j|_A) \otimes (|i\rangle_B \langle j|_B) \end{aligned}$$

describe un estado puro y se tiene que $\rho_{\mathcal{A}} = \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{B}}}(\rho)$ y $\rho_{\mathcal{B}} = \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{A}}}(\rho)$, con lo cual se ve que cualquier operador densidad puede expresarse como estado reducido de un operador densidad puro. Se puede ver además que la matriz reducida $\rho_{\mathcal{A}}$ también satisface (1.1) tomando la traza restringida a $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$.

1.2. Entropía de von Neumann y teoría cuántica de campos

En mecánica cuántica se define la entropía de un estado como

$$S = - \sum_i \lambda_i \ln(\lambda_i), \quad (1.4)$$

donde es λ_i es la probabilidad de encontrar un determinado micro-estado en el sistema. Esta probabilidad corresponde a los autovalores de la matriz densidad que define al estado macroscópico del sistema, por lo que la entropía se puede redefinir

$$S = -\text{Tr}(\rho \ln(\rho)). \quad (1.5)$$

Escrita en términos del operador densidad se conoce como entropía de von Neumann.

Se define la entropía de entrelazamiento de un subsistema \mathcal{A} como

$$S_{\mathcal{A}} = -\text{Tr}(\rho_{\mathcal{A}} \ln(\rho_{\mathcal{A}})), \quad (1.6)$$

siendo $\rho_{\mathcal{A}}$ la matriz densidad reducida que se obtiene de trazar sobre los grados de libertad del complemento de \mathcal{A} . Así definida, esta magnitud mide el grado de entrelazamiento entre \mathcal{A} y su complemento cuando el estado global es puro. En general, es una medida de las correlaciones entre las partes del sistema.

En teoría cuántica de campos la definición anterior se extiende de manera semejante, pero el número de grados de libertad se hace infinito. Como consecuencia aparecen conjuntos infinitos de autovalores de $\rho_{\mathcal{A}}$ y en general $S_{\mathcal{A}}$ es una magnitud divergente. Sin embargo, como se muestra a continuación, en la estructura matemática se $S_{\mathcal{A}}$ aparecen términos universales y característicos de la teoría en cuestión que permiten darle un sentido físico a esta magnitud.

Para un estado global de vacío la matriz densidad es

$$\rho = |0\rangle\langle 0|. \quad (1.7)$$

De la definición (1.5) se ve que la entropía de un estado puro es nula. Por otro lado, si el sistema está dividido en dos regiones espaciales V y \bar{V} , de las cuales solo se puede acceder a V , la entropía de V es

$$S(V) = -\text{Tr}[\rho_V \ln(\rho_V)]. \quad (1.8)$$

Como se mostró en la sección 1.1, ρ_V y $\rho_{\bar{V}}$ tienen entonces los mismos autovalores no nulos con las mismas multiplicidades, por lo que $S(V) = S(\bar{V})$.

Clásicamente la entropía es una magnitud extensiva y se espera que crezca con el volumen de V , pero en teoría de campos esto no parece ser totalmente cierto. La única forma de que la entropía de las dos regiones V y \bar{V} sea la misma es que dependa de

alguna propiedad compartida por ambas partes. Por otro lado, en estados particulares como el vacío las correlaciones decaen fuertemente con la distancia entre los puntos del espacio. Entonces es de esperar que las contribuciones más importantes a los autovalores de ρ_V provengan de la traza sobre aquellos grados de libertad que están sobre la frontera ∂V , característica compartida por ambas regiones. Resulta entonces que el término divergente dominante es proporcional al área en vez del volumen. La entropía de V se puede interpretar entonces como nuestro grado de desconocimiento del sistema debido al entrelazamiento cuántico que existe entre los grados de libertad de un lado y otro de la frontera, y de ahí el nombre “entropía de entrelazamiento”.

Otra cantidad relevante en teoría de la información, tanto clásica como cuántica, y que se extiende también a teoría cuántica de campos es la información mutua. Para dos regiones espaciales A y B , en términos de la entropía de entrelazamiento la información mutua se define como

$$I(A, B) = S(A) + S(B) - S(A \cup B). \quad (1.9)$$

Esta cantidad también da una medida de las correlaciones entre las regiones A y B . Por ejemplo, para el caso en que estamos interesados, de un estado global de vacío y todo el espacio dividido en dos regiones disjuntas, la información mutua sería $I(V, \bar{V}) = 2S(V)$.

Para cualquier teoría cuántica de campos en d dimensiones espaciales se encuentra el desarrollo [8]

$$S(V) = g_{d-1}[\partial V]\epsilon^{-(d-1)} + \dots + g_1[\partial V]\epsilon^{-1} + g_0[\partial V]\ln(\epsilon) + S_0(V), \quad (1.10)$$

para la entropía de V . Este desarrollo es estrictamente cierto para teorías conformes. Teorías más generales que involucren parámetros dimensionales como la masa pueden llegar a incluir potencias no enteras de ϵ . En el desarrollo (1.10), $S_0(V)$ es un término finito, ϵ es una distancia chica tomada como *cutoff* ultravioleta y las g_i son funciones homogéneas de grado i , locales y extensivas en la frontera. El coeficiente $g_{d-1}[\partial V]$, asociado al término divergente dominante, es proporcional a la potencia $(d-1)$ de alguna distancia característica de V y es conocido como ley de área. Se encuentra que los términos proporcionales a g_i para $i > 0$ no son físicos puesto que dependen fuertemente de la regularización y geometría de V . Pero algo distinto ocurre con el término logarítmico, presente solo cuando las dimensiones espaciales son impares. Cualquier re-escalo que se haga sobre el *cutoff* ϵ es absorbido por el término $S_0(V)$ y el logarítmico permanece invariante. Por esta razón, resulta que el coeficiente $g_0[\partial V]$ es universal, en el sentido de que es independiente de la regularización empleada y es característico de la teoría de campos que le da origen.

Otro término universal, proporcional al área, puede encontrarse en $S_0(V)$, pero para calcularlo correctamente hay que tener en cuenta la geometría de la región y regularizar de una forma específica. Puede hacerse utilizando la información mutua entre V y $(\bar{V} - \varepsilon)$, esto es el complemento de V sacando una franja de espesor ε alrededor del borde de V , o bien discretizando el espacio con un mallado que respete las simetrías de la región. Este término fue calculado para escalares masivos en cualquier cantidad de dimensiones por Wilczek y Hertzberg en [9].

En los capítulos subsiguientes revisaremos métodos de cálculos que permiten obtener estos términos universales para teorías libres, específicamente para campos de bosones.

Capítulo 2

Métodos de cálculo

En este capítulo revisaremos dos métodos de cálculo que nos permitirán obtener la entropía de entrelazamiento para el campo escalar y posteriormente para el campo de Maxwell. Primero estudiaremos el método de reducción dimensional. Con el mismo se busca reducir el problema del cálculo de la entropía en cierta cantidad de dimensiones espaciales compactando los campos cuando la región de interés tiene determinadas características. Es útil para teorías libres y nos permite relacionar términos universales de la entropía para la teoría no compactada con coeficientes del desarrollo de la misma en una dimensión menor.

El segundo método que revisamos es el de “tiempo real”, orientado al caso del campo escalar. Este método parte de considerar una teoría discreta en el espacio y termina obteniéndose una expresión para la entropía que depende únicamente de los correladores de dos puntos dentro de la región de interés. Finalmente veremos cómo estos correladores dependen del hamiltoniano discreto de la teoría en cuestión.

2.1. Reducción dimensional

Algunos términos universales en la entropía geométrica de campos libres en una dada dimensión espacial pueden obtenerse a partir de resultados para una dimensión menor. Considérese un conjunto en $r + d$ dimensiones espaciales de la forma $V = Z \times D$ donde Z es una caja de lados L_i , con $i = 1, 2, \dots, r$; en las primeras coordenadas z_1, z_2, \dots, z_r ; y D es un conjunto en las restantes d dimensiones. Estamos interesados en calcular la entropía en V en el límite de los L_i grandes, la cual resulta extensiva en ese límite. Para campos libres, siempre es posible compactar las direcciones z_1, z_2, \dots, z_r imponiendo condiciones periódicas de contorno $z_i = z_i + L_i$, sin cambiar el resultado del término extensivo dominante.

Para un campo escalar. La dependencia en las primeras r coordenadas se puede expandir a través de su serie de Fourier

$$\phi(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}} \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}), \quad (2.1)$$

donde $k_i = \frac{2\pi}{L_i} n_i$, con n_i entero, son los momentos de los campos en las direcciones z_i . Al sustituir (2.1) en la ecuación de Klein-Gordon

$$(\partial_\mu \partial^\mu + \nabla_z^2 - m_0^2) \phi(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = 0, \quad (2.2)$$

con $\mu = 0, r+1, \dots, r+d$, se obtiene $\sum_{\mathbf{k}} (\partial_\mu \partial^\mu - \mathbf{k}^2 - m_0^2) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}} \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = 0$ que conduce a una colección de ecuaciones de Klein-Gordon para campos definidos en las restantes d dimensiones

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m_{\mathbf{k}}^2) \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.3)$$

Desde el punto de vista de las dimensiones no compactadas la masa de los campos están dadas por

$$m_{\mathbf{k}}^2 = m_0^2 + \mathbf{k}^2. \quad (2.4)$$

Gracias a la propiedad extensiva de la entropía, su valor en V se obtiene sumando sobre todas las contribuciones de los campos en las d dimensiones no compactadas

$$S(V) = \sum_{\mathbf{k}} S(D, m_{\mathbf{k}}). \quad (2.5)$$

En el límite de los L_i grandes la suma puede ser reemplazada por una integral

$$S(V) = \int \frac{d^r k}{\frac{(2\pi)^r}{\prod_{i=1}^r L_i}} S\left(D, \sqrt{m_0^2 + \mathbf{k}^2}\right). \quad (2.6)$$

Escribiendo las variables de integración en esféricas $d^r k = dk k^{r-1} \Omega_r$, donde $\Omega_r = \frac{\pi^{r/2}}{\Gamma(r/2+1)}$ es el área de la hipersfera r -dimensional de radio unidad. Entonces la integral queda como

$$S(V) = \frac{\prod_{i=1}^r L_i}{2^r \pi^{r/2} \Gamma(r/2+1)} \int_0^\infty dk k^{r-1} S\left(D, \sqrt{m_0^2 + \mathbf{k}^2}\right). \quad (2.7)$$

Si en lugar de integrar sobre los momentos se hace sobre la masa efectiva de los campos (2.7) se reescribe como

$$S(V) = \frac{\prod_{i=1}^r L_i}{2^r \pi^{r/2} \Gamma(r/2+1)} \int_0^\infty dm m (m^2 - m_0^2)^{r/2-1} S(D, m). \quad (2.8)$$

2.1.1. Cilindro bajo reducción dimensional

En el marco de este trabajo consideraremos un campo escalar sin masa en $(3+1)$ dimensiones espacio-temporales en una geometría cilíndrica en la cual la longitud L es mucho mayor que el radio R del cilindro y la dimensión longitudinal puede ser compactada. Entonces, la expresión (2.8) se simplifica notablemente puesto que $m_0 = 0$ y se compacta una única dimensión espacial. Luego, termina siendo

$$S(V) = \frac{L}{\pi} \int_0^\infty dm S(m, R) \quad (2.9)$$

y el problema se reduce al cálculo de la entropía de un campo escalar masivo en un disco de radio R .

La entropía en el disco $S(m, R)$ admite una expansión en potencias de mR de la forma

$$S(m, R) = c_1 mR + c_0 + c_{(-1)} \frac{1}{mR} + \dots \quad (2.10)$$

Reemplazando en (2.9) esta expresión se ve que el coeficiente logarítmico para la teoría

en $(3+1)$ está directamente relacionado con $c_{(-1)}$ según

$$g_0 = -c_{(-1)} \frac{L}{\pi R}, \quad (2.11)$$

y de acuerdo con Solodukhin [1] el mismo vale

$$c_{(-1)} = -\frac{\pi}{240}. \quad (2.12)$$

En el desarrollo (2.10) solo aparece escrita la parte finita de la entropía, la cual contiene el término en el que estamos interesados.

Por otro lado, se conoce que los términos extensivos en el área A_{d-1} para campos escalares, en d dimensiones espaciales, vienen dados por

$$\Delta S = \gamma_d m^{d-1} A_{d-1}, \quad (2.13)$$

donde $\gamma_d = (-1)^{d/2} [12(2\pi)^{(d-2)/2}(d-1)!!]^{-1}$ para d par [9]. En el caso de $d = 2$

$$\Delta S = -\frac{1}{12} 2\pi m R, \quad (2.14)$$

de donde se desprende que

$$c_1 = -\frac{2\pi}{12}. \quad (2.15)$$

Como se verá en el capítulo 5, los coeficientes c_1 y $c_{(-1)}$ pueden ser calculados numéricamente de manera simultánea, por lo que el resultado que se obtenga para c_1 servirá como respaldo del que se obtenga para $c_{(-1)}$ y viceversa.

2.2. Método de tiempo real para un campo de bosones

Con el método de tiempo real se puede calcular directamente la matriz densidad reducida correspondiente a un estado global de vacío en el espacio de Minkowski y con ella, la entropía de entrelazamiento dada por la ecuación (1.8). Para ello se parte de una versión discreta de la teoría cuántica de campos sobre una red y eventualmente se toma el límite al continuo.

Los campos ϕ_i y momentos conjugados π_j en cada sitio de la red obedecen las relaciones de conmutación canónicas para bosones

$$[\phi_i, \pi_j] = i\delta_{ij} \quad [\phi_i, \phi_j] = [\pi_i, \pi_j] = 0. \quad (2.16)$$

Sean X_{ij} y P_{ij} los correladores de dos puntos i y j en la región V ,

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle = X_{ij} \quad \langle \pi_i \pi_j \rangle = P_{ij}. \quad (2.17)$$

y tenemos además

$$\langle \phi_i \pi_j \rangle = \langle \pi_j \phi_i \rangle^* = \frac{i}{2} \delta_{ij} \quad (2.18)$$

Las variables ϕ_i y π_i son hermíticas con lo cual las matrices X y P son reales, simétricas

y positivas. A partir de que $\langle (\phi_m + i\lambda_{mk}\pi_k)(\phi_l - i\lambda_{ls}^*\pi_s) \rangle$ es una cantidad positiva para constantes λ_{mk} arbitrarias, al tomar $\lambda_{mk} = -1/2 P_{mk}^{-1}$ vemos que

$$XP \geq \frac{1}{4}. \quad (2.19)$$

Asumimos además que cualquier otro correlador entre funciones de los campos y momentos conjugados se obtiene a partir de los anteriores según lo establece el teorema de Wick.

Ahora, el operador densidad reducido, al ser hermítico y definido positivo, siempre se puede escribir como la exponencial de un operador hermítico de la forma

$$\rho_V = A e^{-\mathcal{H}} \quad (2.20)$$

donde $\mathcal{H} = \sum_l \varepsilon_l a_l^\dagger a_l$ es el hamiltoniano modular correspondiente a la región V.

La constante de normalización A se toma tal que $\text{Tr}(\rho_V) = 1$. Esto es,

$$\text{Tr}(\rho_V) \equiv \sum_{\{n\}} \langle n | A e^{-\sum_l \varepsilon_l a_l^\dagger a_l} | n \rangle = 1. \quad (2.21)$$

Aquí $|n\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \dots \otimes |n_l\rangle \dots$ siendo $|n_l\rangle$ autoestado del hamiltoniano modular en el sitio l . La suma se realiza sobre todas las posibles configuraciones $\{n_1 n_2 \dots n_l \dots\}$. El cálculo sigue

$$\begin{aligned} 1 &= A \sum_{\{n\}} \langle n | \prod_l e^{-\varepsilon_l a_l^\dagger a_l} | n \rangle, \\ &= A \prod_l \sum_{n_l} \langle n_l | e^{-\varepsilon_l a_l^\dagger a_l} | n_l \rangle, \\ &= A \prod_l \frac{1}{(1 - e^{-\varepsilon_l})}, \\ A &= \prod_l (1 - e^{-\varepsilon_l}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Por otra parte, los campos canónicamente conjugados de la teoría pueden ser escritos en función de los operadores de creación y aniquilación del hamiltoniano modular de manera que

$$\phi_i = \alpha_{ij}^* a_j^\dagger + \alpha_{ij} a_j, \quad (2.23)$$

$$\pi_i = -i\beta_{ij}^* a_j^\dagger + i\beta_{ij} a_j. \quad (2.24)$$

De las relaciones de conmutación entre ϕ y π se encuentra que las matrices α y β satisfacen

$$\alpha^* \beta^T + \alpha \beta^\dagger = \mathbb{I}. \quad (2.25)$$

Con las expresiones (2.23), (2.24) y (2.20) podemos calcular los correladores X_{ij} , P_{ij} y $\langle \phi_i \pi_j \rangle$ que quedarán en términos de los correladores de los operadores de creación y destrucción del hamiltoniano modular $\langle a_k a_l \rangle$, $\langle a_k^\dagger a_l \rangle$ y $\langle a_k^\dagger a_l^\dagger \rangle$. Estos últimos pueden obtenerse trazando los productos correspondientes con la matriz densidad reducida.

Para $\langle a_k^\dagger a_l^\dagger \rangle$ se tiene

$$\begin{aligned}\langle a_k^\dagger a_l^\dagger \rangle &= \text{Tr} \left(\rho_V a_k^\dagger a_l^\dagger \right), \\ &= A \sum_{\{n\}} \langle n | \prod_i e^{-\varepsilon_i a_i^\dagger a_i} a_k^\dagger a_l^\dagger | n \rangle.\end{aligned}$$

Cada factor en el producto de las exponenciales actúa sobre un subespacio diferente, por lo que se puede separar en dos factores: uno que actúa sobre $\bigotimes_i |n_i\rangle$ con $i \neq k; i \neq l$ y otro que actúa sobre $|n_k\rangle \otimes |n_l\rangle$, para k y l dados. Con lo cual la expresión anterior se reescribe como

$$\langle a_k^\dagger a_l^\dagger \rangle = A \left\{ \prod_{i \neq k, l} \sum_{n_i} e^{-\varepsilon_i n_i} \right\} \left\{ \sum_{n_k, n_l} \langle n | e^{-\varepsilon_k a_k^\dagger a_k} a_k^\dagger e^{-\varepsilon_l a_l^\dagger a_l} a_l^\dagger | n \rangle \right\}.$$

Los operadores de creación en el factor de la derecha actúan de la manera usual sobre los autoestados del hamiltoniano modular en cada sitio,

$$\langle a_k^\dagger a_l^\dagger \rangle = A \left\{ \prod_{i \neq k, l} \sum_{n_i} e^{-\varepsilon_i n_i} \right\} \left\{ \sum_{n_k, n_l} e^{-\varepsilon_k n_k} e^{-\varepsilon_l n_l} \sqrt{(n_k + 1)(n_l + 1)} \langle n_k | n_k + 1 \rangle \langle n_l | n_l + 1 \rangle \right\}.$$

Por último, la ortogonalidad de los autoestados del hamiltoniano modular hace que

$$\langle a_k^\dagger a_l^\dagger \rangle = 0. \quad (2.26)$$

De manera análoga para $\langle a_k a_l \rangle$ se obtiene

$$\begin{aligned}\langle a_k a_l \rangle &= A \left\{ \prod_{i \neq k, l} \sum_{n_i} e^{-\varepsilon_i n_i} \right\} \left\{ \sum_{n_k, n_l} e^{-\varepsilon_k n_k} e^{-\varepsilon_l n_l} \sqrt{n_k n_l} \langle n_k | n_k - 1 \rangle \langle n_l | n_l - 1 \rangle \right\}, \\ \langle a_k a_l \rangle &= 0.\end{aligned} \quad (2.27)$$

Este resultado y el anterior valen igualmente si $l = k$. Para $\langle a_k^\dagger a_l \rangle$, si $l \neq k$

$$\begin{aligned}\langle a_k^\dagger a_l \rangle &= A \left\{ \prod_{i \neq k, l} \sum_{n_i} e^{-\varepsilon_i n_i} \right\} \left\{ \sum_{n_k, n_l} e^{-\varepsilon_k n_k} e^{-\varepsilon_l n_l} \sqrt{(n_k + 1)n_l} \langle n_k | n_k + 1 \rangle \langle n_l | n_l - 1 \rangle \right\}, \\ \langle a_k^\dagger a_l \rangle &= 0.\end{aligned} \quad (2.28)$$

Los únicos que resultan distintos de cero corresponden a los valores de expectación del

operador de número en cada sitio de la red. Esto es

$$\begin{aligned}
 \langle a_k^\dagger a_k \rangle &= A \left\{ \prod_{i \neq k} \sum_{n_i} e^{-\varepsilon_i n_i} \right\} \sum_{n_k} e^{-\varepsilon_k n_k} n_k, \\
 &= A \frac{K^{-1}}{\sum_{n_i} e^{-\varepsilon_i n_i}} \frac{e^{-\varepsilon_k}}{(1 - e^{-\varepsilon_k})^2}, \\
 &= \frac{(1 - e^{-\varepsilon_k}) e^{-\varepsilon_k}}{(1 - e^{-\varepsilon_k})^2}, \\
 \langle a_k^\dagger a_k \rangle &= (e^{\varepsilon_k} - 1)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

De acá se define la matriz de número de ocupación como la matriz diagonal

$$n_{kl} := \langle a_k^\dagger a_l \rangle = \delta_{kl} (e^{\varepsilon_k} - 1)^{-1}. \tag{2.30}$$

Luego, los correladores X_{ij} , P_{ij} y $\langle \phi_i \pi_j \rangle$ se calculan respectivamente como

$$\begin{aligned}
 X_{ij} &= \langle (\alpha_{ik}^* a_k^\dagger + \alpha_{ik} a_k) (\alpha_{il}^* a_l^\dagger + \alpha_{il} a_l) \rangle, \\
 &= \alpha_{ik}^* \alpha_{il}^* \langle a_k^\dagger a_l^\dagger \rangle + \alpha_{ik} \alpha_{il}^* \langle a_k a_l^\dagger \rangle + \alpha_{ik}^* \alpha_{il} \langle a_k^\dagger a_l \rangle + \alpha_{ik} \alpha_{il} \langle a_k a_l \rangle, \\
 &= \alpha_{ik} \alpha_{il}^* (\delta_{kl} + \langle a_l^\dagger a_k \rangle) + \alpha_{ik}^* \alpha_{il} \langle a_k^\dagger a_l \rangle, \\
 X_{ij} &= \alpha_{ik} (\delta_{kl} + n_{kl}) \alpha_{li}^\dagger + \alpha_{ik}^* n_{kl} \alpha_{li}^T;
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}
 P_{ij} &= \langle (-i\beta_{ik}^* a_k^\dagger + i\beta_{ik} a_k) (-i\beta_{il}^* a_l^\dagger + i\beta_{il} a_l) \rangle, \\
 &= -\beta_{ik}^* \beta_{il}^* \langle a_k^\dagger a_l^\dagger \rangle + \beta_{ik} \beta_{il}^* \langle a_k a_l^\dagger \rangle + \beta_{ik}^* \beta_{il} \langle a_k^\dagger a_l \rangle - \beta_{ik} \beta_{il} \langle a_k a_l \rangle, \\
 &= \beta_{ik} \beta_{il}^* (\delta_{kl} + \langle a_l^\dagger a_k \rangle) + \beta_{ik}^* \beta_{il} \langle a_k^\dagger a_l \rangle, \\
 P_{ij} &= \beta_{ik} (\delta_{kl} + n_{kl}) \beta_{li}^\dagger + \beta_{ik}^* n_{kl} \beta_{li}^T
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

y análogamente

$$\langle \phi_i \pi_j \rangle = -i\alpha_{ik} (\delta_{kl} + n_{kl}) \beta_{li}^\dagger + i\alpha_{ik}^* n_{kl} \beta_{li}^T = \frac{1}{2} \delta_{ij}. \tag{2.33}$$

Las relaciones (2.31), (2.32) y (2.33) matricialmente quedan escritas como

$$X = \alpha(\mathbb{I} + n)\alpha^\dagger + \alpha^* n \alpha^T, \tag{2.34}$$

$$P = \beta(\mathbb{I} + n)\beta^\dagger + \beta^* n \beta^T, \tag{2.35}$$

$$\frac{1}{2} \mathbb{I} = -\alpha(\mathbb{I} + n)\beta^\dagger + \alpha^* n \beta^T. \tag{2.36}$$

Las matrices α y β se pueden escribir como $\alpha = \alpha_1 U$ y $\beta = \beta_1 U$ con U matriz unitaria y diagonal, α_1 y β_1 reales. A la vez, se pueden redefinir los operadores a_i de modo que absorban la matriz U . Entonces la ecuaciones (2.34), (2.35) y (2.36) quedan

escritas de la forma

$$X = \alpha_1(\mathbb{I} + 2n)\alpha_1^T, \quad (2.37)$$

$$P = \beta_1(\mathbb{I} + 2n)\beta_1^T, \quad (2.38)$$

$$\frac{1}{2}\mathbb{I} = -\alpha_1\beta_1^T. \quad (2.39)$$

Al multiplicar las relaciones (2.37), (2.38)

$$XP = \alpha_1 \frac{1}{4}(\mathbb{I} + 2n)^2 \alpha_1^{-1} \quad (2.40)$$

se hace explícita una relación de semejanza entre los operadores XP y $\frac{1}{4}(\mathbb{I} + 2n)^2$ a través de la matriz α . Por tanto, los autovalores de ambos operadores son iguales. Llamemos ν_k a los autovalores de \sqrt{XP} , los autovalores de n vienen dados por (2.30). Como se verá enseguida, para el cálculo de la entropía conviene expresar los autovalores ε_k del hamiltoniano modular en función de los ν_k . Para ello hay que invertir

$$\nu_k = \frac{1}{2} (1 + 2(e^{\varepsilon_k} - 1)^{-1}) \quad (2.41)$$

y se obtiene

$$\varepsilon_k = \ln \left(\frac{\nu_k + 1/2}{\nu_k - 1/2} \right). \quad (2.42)$$

Ahora, la entropía de V está dada por

$$S = -\text{Tr}(\rho_V \ln(\rho_V)). \quad (2.43)$$

Sustituyendo (2.20) en (2.43) se obtiene

$$\begin{aligned} S &= -\ln(A) + \text{Tr} \left(A \sum_k \varepsilon_k a_k^\dagger a_k \prod_l e^{-\varepsilon_l a_l^\dagger a_l} \right), \\ S &= \sum_k \left\{ -\ln(1 - e^{-\varepsilon_k}) + \frac{\varepsilon_k e^{-\varepsilon_k}}{1 - e^{-\varepsilon_k}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Finalmente, usando (2.42) se llega a la relación

$$S = \text{Tr}((C + 1/2)\ln(C + 1/2) - (C - 1/2)\ln(C - 1/2)) \quad (2.45)$$

donde $C = \sqrt{XP}$, la cual está bien definida ya que $C \geq 1/2$, como vimos anteriormente en (2.19).

Hasta acá, se ha obtenido una expresión que permite calcular la entropía de una determinada región V del espacio a partir de una suma sobre los autovalores del operador C que depende de los correladores de los campos ϕ y π canónicamente conjugados en V . Entonces, el cálculo de la entropía de entrelazado se reduce a conocer X y P (2.17) en V para un estado global de vacío, lo cual dependerá de la teoría específica que se desee estudiar.

2.2.1. Correladores para un hamiltoniano cuadrático

Para este trabajo es de interés conocer los correladores X y P para un hamiltoniano de la forma

$$H = \frac{1}{2} \sum_i \pi_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \phi_i K_{ij} \phi_j. \quad (2.46)$$

Mediante un cambio de variables es posible reescribir el hamiltoniano de manera que la matriz K sea diagonal. Esto es $\tilde{\phi} = A\phi$ con $A^{-1} = A^T$ y tal que $K = A^{-1} \tilde{K} A$ con \tilde{K} diagonal. En esta nueva base el hamiltoniano queda de la forma

$$H = \frac{1}{2} \sum_i \tilde{\pi}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_i \tilde{K}_{ii} \tilde{\phi}_i^2 \quad (2.47)$$

que corresponde al de un conjunto de osciladores armónicos independientes, los modos normales del sistema. Las ecuaciones canónicas de movimiento

$$i \frac{d}{dt} \tilde{\phi}_i = [\tilde{\phi}_i, H] \quad (2.48)$$

y

$$i \frac{d}{dt} \tilde{\pi}_i = [\tilde{\pi}_i, H] \quad (2.49)$$

se resuelven para

$$\tilde{\phi}_i = \frac{1}{\sqrt{2\omega_i}} \left(a_i e^{-i\omega_i t} + a_i^\dagger e^{i\omega_i t} \right). \quad (2.50)$$

y se obtiene que las frecuencias de los modos normales son precisamente $\omega_i = \sqrt{\tilde{K}_{ii}}$.

Ahora, los correladores X y P en el vacío se calculan como

$$\begin{aligned} X_{ij} &= \sum_{k,l} \langle 0 | \frac{A_{ik}^{-1} A_{jl}^{-1}}{2\sqrt{\omega_k \omega_l}} (a_k + a_k^\dagger)(a_l + a_l^\dagger) | 0 \rangle, \\ &= \sum_{k,l} \frac{A_{ik}^{-1} A_{jl}^{-1}}{2\sqrt{\omega_k \omega_l}} \delta_{kl}, \\ &= \frac{1}{2} \sum_l A_{il}^{-1} \left(\tilde{K}^{-1/2} \right)_{ll} A_{lj}, \\ X_{ij} &= \frac{1}{2} (K^{-1/2})_{ij}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Análogamente se obtiene

$$P_{ij} = \frac{1}{2} (K^{1/2})_{ij}. \quad (2.52)$$

Entonces, los correladores que se precisan para el cálculo de la entropía se obtienen directamente de las componentes de las matriz K de la teoría en su versión discreta.

Capítulo 3

Campo escalar: del cilindro al disco

Estamos interesados en calcular la entropía de entrelazamiento de un campo escalar sin masa en un cilindro de longitud L en $(3+1)$ dimensiones. Primero haremos una reducción dimensional en la coordenada axial a lo largo del cilindro y luego calcularemos la entropía a través del método de “tiempo real” por lo que nos concentraremos en reescribir el hamiltoniano de la forma (2.46).

En principio se tiene que

$$H = \frac{1}{2} \int dV (\pi^2 + \nabla \phi^2). \quad (3.1)$$

Vimos que imponiendo condiciones periódicas de contorno sobre las bases del cilindro es posible escribir el campo como un desarrollo de Fourier

$$\phi(\rho, \theta, z) = \sum_n \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i \frac{2\pi n}{L} z} \phi_n(\rho, \theta), \quad (3.2)$$

siendo $\phi_n(\rho, \theta)$ un conjunto de campos definidos sobre un disco, y de esta forma se reduce una de las dimensiones. Esta compactificación de la dirección longitudinal resulta en la aparición de una masa para los campos no compactados del disco dada por los momentos $k = 2\pi n/L$, lo cual puede leerse directamente del hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} \sum_n \int d\theta d\rho (|\pi_n|^2 + |\nabla_D \phi_n|^2 + k^2 |\phi_n|^2). \quad (3.3)$$

Aquí ∇_D represente el gradiente bidimensional en el disco y $\pi_n(\rho, \theta) = \dot{\phi}_n(\rho, \theta)$ son los momentos conjugados de los campos no compactados en el disco.

Por otro lado, la simetría de rotación del problema posibilita hacer una segunda descomposición, esta vez en modos angulares. De manera que el campo en el cilindro queda escrito como

$$\phi(\rho, \theta, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi L}} e^{il\theta} e^{i \frac{2\pi n}{L} z} \phi_{ln}(\rho), \quad (3.4)$$

con ϕ_{nl} campos en (1+1) dimensiones, definidos como la transformada de Fourier

$$\phi_{ln}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi L}} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-L/2}^{L/2} dz e^{-il\theta} e^{-i\frac{2\pi n}{L}z} \phi(\rho, \theta, z). \quad (3.5)$$

Llamaremos

$$V_{ln}(\theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi L}} e^{il\theta} e^{i\frac{2\pi n}{L}z}, \quad (3.6)$$

al conjunto de funciones, ortonormales por construcción

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-L/2}^{L/2} dz V_{ln}(\theta, z) V_{l'n'}^*(\theta, z) = \delta_{ll'} \delta_{nn'}, \quad (3.7)$$

que usaremos como base del espacio de Hilbert.

Además, si pedimos que el campo ϕ sea real, entonces se tiene que satisfacer

$$\phi_{ln}^\dagger = \phi_{-l-n}. \quad (3.8)$$

Con lo cual podemos reescribir el campo como

$$\phi(\rho, \theta, z) = \sum_{n,l} V_{ln}(\theta, z) \phi_{ln}(\rho) = \sum_{n,l} V_{ln}^*(\theta, z) \phi_{ln}^\dagger(\rho) \quad (3.9)$$

y su momento canónico conjugado

$$\pi(\rho, \theta, z) = \sum_{n,l} V_{ln}(\theta, z) \pi_{ln}(\rho) = \sum_{n,l} V_{ln}^*(\theta, z) \pi_{ln}^\dagger(\rho), \quad (3.10)$$

tomando

$$\pi_{l,n} = \dot{\phi}_{l,n}. \quad (3.11)$$

Campo y momento conjugado satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\phi(\rho, \theta, z), \pi(\rho', \theta', z')] = \frac{i}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\theta - \theta') \delta(z - z') \quad (3.12)$$

en coordenadas cilíndricas. Reescalando los campos radiales asociados a ϕ y π de esta manera

$$\tilde{\phi}_{ln} = \rho^{1/2} \phi_{ln} \quad \tilde{\pi}_{ln} = \rho^{1/2} \pi_{ln}, \quad (3.13)$$

hacemos que satisfagan relaciones canónicas de conmutación

$$[\tilde{\phi}_{ln}(\rho), \tilde{\pi}_{l'n'}^\dagger(\rho')] = i \delta_{ll'} \delta_{nn'} \delta(\rho - \rho'). \quad (3.14)$$

Ahora, si reescribimos el hamiltoniano de la teoría usando las ecuaciones (3.6) a (3.10) y (3.13), el mismo se reduce a la suma

$$H = \sum_n H_n, \quad (3.15)$$

con

$$H_n = H_{0n} + 2 \sum_{l=1}^{\infty} H_{ln}, \quad (3.16)$$

siendo

$$H_{ln} = \frac{1}{2} \int d\rho \left\{ |\tilde{\pi}_{ln}|^2 + \rho \left| \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{-1/2} \tilde{\phi}_{ln} \right) \right|^2 + \left(\frac{l^2}{\rho^2} + k^2 \right) |\tilde{\phi}_{ln}|^2 \right\}. \quad (3.17)$$

Los H_n son hamiltonianos de campos escalares masivos definidos sobre el disco. Estos van a contribuir de manera extensiva a la entropía debido a que se encuentran desacoplados. Como vimos en el apartado 2.1, en el límite de L grande la suma (3.15) se puede aproximar por una integral sobre los momentos en z o, lo que es igual, sobre la masa de los campos en el disco. En el apartado 2.1.1 encontramos que el coeficiente logarítmico de la entropía en el cilindro está asociado al coeficiente $c_{(-1)}$ que acompaña al término $1/mR$ en el desarrollo de la entropía en el disco, con lo que la suma sobre n no será necesario hacerla efectivamente. A su vez, los H_n se descomponen según las ecuaciones (3.16) y (3.17) en modos angulares desacoplados, que contribuyen también de manera independiente a la entropía en el disco. El problema original, en (3+1) dimensiones, lo reducimos finalmente a uno equivalente en (1+1) dimensiones.

Capítulo 4

Campo de Maxwell en el cilindro

El campo de Maxwell, al ser un campo vectorial, consta de un grado más de dificultad al momento de calcular la entropía de entrelazamiento. La idea que seguiremos será la de relacionar el hamiltoniano de esta teoría con el del campo escalar que estudiamos previamente. De esta forma, haciendo primeramente reducción dimensional en la dirección del eje del cilindro, reduciremos el cálculo al un campo escalar con ciertas modificaciones que veremos al final del capítulo.

4.1. Hamiltoniano del campo de Maxwell

El hamiltoniano del campo de Maxwell, escrito en términos de los campos físicos, es

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2). \quad (4.1)$$

En coordenadas cilíndricas es posible escribir los vectores \mathbf{E} y \mathbf{B} en términos de la base de funciones (3.6) de la siguiente manera

$$\mathbf{E} = \left\{ E_{ln}^\rho(\rho)\hat{\rho} + E_{ln}^\theta(\rho)\hat{\theta} + E_{ln}^z(\rho)\hat{z} \right\} V_{ln}(\theta, z) \quad (4.2)$$

donde hemos usado el convenio de suma de Einstein. De esta forma los campos físicos quedan escritos en la base ortonormal de funciones vectoriales

$$\left\{ V_{ln}(\theta, z)\hat{\rho}; V_{ln}(\theta, z)\hat{\theta}; V_{ln}(\theta, z)\hat{z} \right\}. \quad (4.3)$$

En ausencia de cargas los campos satisfacen la condición

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.4)$$

que elimina un grado de libertad a cada uno. Para el campo eléctrico, por ejemplo, la condición (4.4) en coordenadas cilíndricas se escribe

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_{ln}^\rho) + i \frac{l}{\rho} E_{ln}^\theta + ik E_{ln}^z = 0. \quad (4.5)$$

A pesar de lo natural que resulta, la base (4.3) no es la más apropiada para escribir el hamiltoniano del problema, aunque sí nos será de utilidad más adelante en el cálculo

de los conmutadores de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} .

Para construirnos una base más adecuada a nuestros propósitos partiremos definiéndonos el vector $\mathbf{q} = (0, l/\rho, k)$ con $k = 2\pi n/L$. Proponemos ahora la descomposición de los vectores eléctrico y magnético en tres componentes: una en la dirección de $\hat{\rho}$, otra paralela a \mathbf{q} y la última ortogonal a las dos anteriores. Esto es

$$\mathbf{E} = \left\{ E_{ln}^\rho(\rho)\hat{\rho} + E_{ln}^\parallel(\rho)\hat{q} + E_{ln}^\perp(\rho)(\hat{q} \times \hat{\rho}) \right\} V_{ln}(\theta, z), \quad (4.6)$$

con

$$E_{ln}^\parallel = \frac{1}{|\mathbf{q}|} \left(\frac{l}{\rho} E_{ln}^\theta + k E_{ln}^z \right) \quad (4.7)$$

y

$$E_{ln}^\perp = \frac{1}{|\mathbf{q}|} \left(k E_{ln}^\theta - \frac{l}{\rho} E_{ln}^z \right). \quad (4.8)$$

La figura 4.1 ilustra la relación que hay entre la base de coordenadas cilíndricas y la nueva base elegida para abordar el problema.

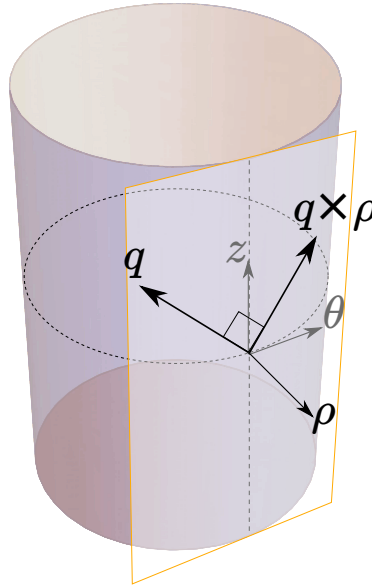


Figura 4.1: Relación entre la base de coordenadas cilíndricas y la utilizada para escribir el hamiltoniano del campo de Maxwell.

En esta nueva base la condición (4.4) establece las relaciones

$$E_{ln}^\parallel = \frac{i}{|\mathbf{q}|} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_{ln}^\rho) \quad B_{ln}^\parallel = \frac{i}{|\mathbf{q}|} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_{ln}^\rho) \quad (4.9)$$

entre las componentes paralelas y radiales de los campos.

Al igual que hicimos en el caso del campo escalar pediremos que los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} sean reales, con lo cual

$$E_{ln}^{\dagger s} = E_{-l-n}^s \quad B_{ln}^{\dagger s} = B_{-l-n}^s, \quad (4.10)$$

con $s = \rho, \theta, z$; o bien $s = \rho, \parallel, \perp$ según la base en que estemos trabajando. Luego, el

hamiltoniano en esta última base se escribe

$$H = \frac{1}{2} \int dz d\theta d\rho \rho \left\{ \left(E_{ln}^\rho E_{l'n'}^{\dagger\rho} + E_{ln}^\parallel E_{l'n'}^{\dagger\parallel} + E_{ln}^\perp E_{l'n'}^{\dagger\perp} \right) V_{ln} V_{l'n'}^* + |\mathbf{B}|^2 \right\}, \quad (4.11)$$

y usando las ecuaciones (3.7) y (4.9) se reduce a

$$H = \sum_n H_n, \quad (4.12)$$

con

$$H_n = H_{0n} + 2 \sum_{l=1}^{\infty} H_{ln}, \quad (4.13)$$

siendo

$$H_{ln} = \frac{1}{2} \int d\rho \rho \left\{ |E_{ln}^\rho|^2 + \frac{1}{\mathbf{q}^2 \rho} \left| \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_{ln}^\rho) \right|^2 + |B_{ln}^\perp|^2 + (E_{ln} \leftrightarrow B_{ln}) \right\}. \quad (4.14)$$

De manera similar al caso escalar, el problema en (3+1) dimensiones se redujo a uno en (1+1) dimensiones. La condición (4.4) elimina dos grados de libertad por lo que en (4.14) aparecen solo cuatro en lugar de las seis componentes originales del campo electromagnético. Como queremos comparar este hamiltoniano con el de un campo escalar, debemos identificar previamente cuales son los campos y los correspondientes momentos conjugados. Para ello debemos obtener las relaciones de conmutación que satisfacen las componentes de los campos eléctricos y magnéticos escritos en la base (4.3), lo cual describimos en la siguiente sección.

4.2. Conmutadores de los campos físicos

En coordenadas cartesianas los conmutadores entre los campos eléctricos y magnéticos son

$$[E^i(\mathbf{x}), B^j(\mathbf{x}')] = -i\epsilon^{ijk} \partial_k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (4.15)$$

donde ϵ^{ijk} son las componentes del tensor de Levi-Civita. Para abreviar llamaremos $c^{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = [E^i(\mathbf{x}), B^j(\mathbf{x}')].$

Las componentes de un campo vectorial en la base cilíndrica en función de sus componentes cartesianas se expresan como

$$\begin{pmatrix} E_{ln}^\rho \\ E_{ln}^\theta \\ E_{ln}^z \end{pmatrix} V_{ln} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E^1 \\ E^2 \\ E^3 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Aquí hemos usado la notación de Einstein para la suma sobre l y n . Al escribir los conmutadores usando la expresión (4.16) y la correspondiente al campo magnético, que formalmente es la misma, encontramos que los únicos conmutadores no nulos son

$$c_{lnl'n'}^{\rho\theta} V_{ln} V_{l'n'}^* = c^{12} \quad (4.17)$$

y

$$\begin{pmatrix} c_{ln'l'n'}^{\rho z} \\ c_{ln'l'n'}^{\theta z} \end{pmatrix} V_{ln} V_{l'n'}^* = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c^{13} \\ c^{23} \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Para terminar de resolver estas ecuaciones debemos reescribir el miembro derecho de la ecuación (4.15) en coordenadas polares, esto es

$$\begin{aligned} c^{12} &= -i \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\theta - \theta') \delta(z - z'), \\ c^{13} &= i \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \rho} + \cos \theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\theta - \theta') \delta(z - z'), \\ c^{23} &= -i \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \sin \theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(-\theta') \delta(z - z'). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Sustituyendo la ecuación (4.19) en (4.17) y (4.18) obtenemos

$$\begin{aligned} c_{ln'l'n'}^{\rho\theta} V_{ln} V_{l'n'}^* &= -i \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\theta - \theta') \delta(z - z'), \\ c_{ln'l'n'}^{\rho z} V_{ln} V_{l'n'}^* &= i \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\theta - \theta') \delta(z - z'), \\ c_{ln'l'n'}^{\theta z} V_{ln} V_{l'n'}^* &= -i \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\theta - \theta') \delta(z - z'). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Finalmente resolvemos los conmutadores que aparecen en el miembro izquierdo en (4.20). Por ejemplo, el conmutador $c_{ln'l'n'}^{\rho\theta}$ se obtiene de

$$c_{ln'l'n'}^{\rho\theta} = -i \int d\theta d\theta' dz dz' \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\theta - \theta') \delta(z - z') V_{ln}^*(\theta z) V_{l'n'}(\theta' z') \quad (4.21)$$

Haciendo esto mismo para cada una de las ecuaciones (4.20) dando como resultado

$$\begin{aligned} [E_{ln}^\rho(\rho), B_{l'n'}^{\dagger\theta}(\rho')] &= \frac{k}{\rho} \delta_{ll'} \delta_{nn'} \delta(\rho - \rho'), \\ [E_{ln}^\rho(\rho), B_{l'n'}^{\dagger z}(\rho')] &= -\frac{l}{\rho^2} \delta_{ll'} \delta_{nn'} \delta(\rho - \rho'), \\ [E_{ln}^\theta(\rho), B_{l'n'}^{\dagger z}(\rho')] &= -\frac{i}{\rho} \delta_{ll'} \delta_{nn'} \frac{\partial}{\partial \rho} \delta(\rho - \rho'). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Debido a la condición dada por la ecuación (4.4) solo el conmutador entre E_{ln}^ρ y $B_{l'n'}^{\dagger\theta}$ es independiente, mientras que los otros dos se pueden obtener a partir del primero. Además se tiene que al intercambiar las componentes ρ, θ, z en los conmutadores anteriores estos cambian de signo.

Ahora, definimos los campos y momentos conjugados

$$\phi_{ln}^{(1)} = \frac{1}{|\mathbf{q}|} \rho^{1/2} E_{ln}^\rho \quad \pi_{ln}^{(1)} = -i \rho^{1/2} B_{ln}^\perp \quad (4.23)$$

$$\phi_{ln}^{(2)} = \frac{1}{|\mathbf{q}|} \rho^{1/2} B_{ln}^\rho \quad \pi_{ln}^{(2)} = -i \rho^{1/2} E_{ln}^\perp. \quad (4.24)$$

Usando las ecuaciones (4.22) vemos que los mismos satisfacen las relaciones de com-

mutación canónicas

$$\left[\phi_{ln}^{(1)}(\rho), \pi_{l'n'}^{(1)\dagger}(\rho') \right] = i\delta_{ll'}\delta_{nn'}\delta(\rho - \rho'); \quad \left[\phi_{ln}^{(2)}(\rho), \pi_{l'n'}^{(2)\dagger}(\rho') \right] = i\delta_{ll'}\delta_{nn'}\delta(\rho - \rho'). \quad (4.25)$$

El paso siguiente es reescribir el hamiltoniano (4.14) en termino de estos nuevos campos y compararlo con el del campo escalar.

4.3. Dos campos escalares desacoplados en un potencial cuadrático

En función de los nuevos campos el hamiltoniano (4.14) queda escrito como

$$H_{ln} = \frac{1}{2} \int d\rho \left\{ \left| \pi_{ln}^{(1)} \right|^2 + \frac{1}{\mathbf{q}^2 \rho} \left| \frac{\partial}{\partial \rho} \left(|\mathbf{q}| \rho^{1/2} \phi_{ln}^{(1)} \right) \right|^2 + \mathbf{q}^2 \left| \phi_{ln}^{(1)} \right|^2 \right. \\ \left. + \left| \pi_{ln}^{(2)} \right|^2 + \frac{1}{\mathbf{q}^2 \rho} \left| \frac{\partial}{\partial \rho} \left(|\mathbf{q}| \rho^{1/2} \phi_{ln}^{(2)} \right) \right|^2 + \mathbf{q}^2 \left| \phi_{ln}^{(2)} \right|^2 \right\}. \quad (4.26)$$

Si comparamos este hamiltoniano con el del campo escalar

$$H_{ln} = \frac{1}{2} \int d\rho \left\{ |\tilde{\pi}_{ln}|^2 + \rho \left| \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{-1/2} \tilde{\phi}_{ln} \right) \right|^2 + \mathbf{q}^2 |\tilde{\phi}_{ln}|^2 \right\}, \quad (4.27)$$

vemos que se trata de dos copias muy parecidas a este último. La única diferencia proviene del término con derivada que desarrollaremos a continuación.

La idea es separar del término con derivadas en la ecuación (4.26) un término con derivadas como el que aparece en la ecuación (4.27). Para ello escribiremos el primero como

$$\frac{1}{\mathbf{q}^2 \rho} \left| \frac{\partial}{\partial \rho} \left(|\mathbf{q}| \rho^{1/2} \phi_{ln} \right) \right|^2 = f \rho \left| \frac{\partial}{\partial \rho} \left(f^{-1/2} \rho^{-1/2} \phi_{ln} \right) \right|^2 \quad (4.28)$$

con ayuda de la función $f(\rho) = |\mathbf{q}|^{-2} \rho^{-2}$.

Expandiendo el miembro derecho de (4.28)

$$f \rho \left| \frac{\partial}{\partial \rho} \left(f^{-1/2} \rho^{-1/2} \phi_{ln} \right) \right|^2 = \rho \left| \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{-1/2} \phi_{ln} \right) \right|^2 + \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{k^2}{|\mathbf{q}|^2 \rho} |\phi_{ln}|^2 \right] \\ + \frac{\rho^2 k^4 - 2l^2 k^2}{(\rho^2 k^2 + l^2)^2} |\phi_{ln}|^2 \quad (4.29)$$

encontramos un término idéntico al que aparecen en el hamiltoniano del campo escalar, uno que es una derivada total que podemos ignorar si suponemos campos evanescentes en el infinito y un término extra cuadrático en el campo. Con lo cual concluimos que el campo de Maxwell en una región cilíndrica en (3+1) dimensiones equivale a dos campos escalares desacoplados en (1+1) dimensiones que se mueven en este potencial cuadrático extra

$$V(\phi) = \sum_{l,n} \frac{\rho^2 k^4 - 2l^2 k^2}{(\rho^2 k^2 + l^2)^2} |\phi_{ln}|^2. \quad (4.30)$$

Analíticamente es muy difícil deducir cómo este potencial modifica el coeficiente

logarítmico de la entropía de entrelazamiento de un campo escalar como el estudiado en el capítulo 3. Se hace necesario entonces recurrir a cálculos numéricos que nos permitan aproximarnos a la respuesta. Para ello emplearemos el método de “tiempo real” estudiado en el apartado 2.2, el cual nos permite calcular la entropía a partir de conocer la matriz K asociada al hamiltoniano discreto.

Capítulo 5

Cálculos numéricos

5.1. Discretización del hamiltoniano

Como hemos visto hasta aquí, el problema de calcular la entropía de entrelazado del campo electromagnético en una región cilíndrica en (3+1) dimensiones se puede reducir al cálculo de la misma para un campo escalar masivo en un disco con un término cuadrático extra. Por la simetría de rotación de esta geometría el problema se traslada a uno equivalente en (1+1) dimensiones. Luego, a partir del método de “tiempo real” revisado en el apartado 2.2 podemos calcular la entropía de entrelazamiento asociada a los campos en el disco utilizando la fórmula

$$S = \text{Tr}((C + 1/2)\ln(C + 1/2) - (C - 1/2)\ln(C - 1/2)) \quad (5.1)$$

con $C = \sqrt{XP}$ y X, P los correladores de los campos y momentos conjugados reducidos a la región de interés. El cálculo de los correladores X y P lo hacemos a partir de una versión discreta del hamiltoniano, siguiendo las prescripciones dadas por las ecuaciones (2.51) y (2.52). Se precisa entonces discretizar el hamiltoniano del campo escalar en el disco (3.17) y el del campo escalar equivalente obtenido en el apartado 4.3, y luego identificar los elementos de la matriz K asociada al hamiltoniano discreto de la forma

$$H = \frac{1}{2} \sum_i \pi_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \phi_i K_{ij} \phi_j. \quad (5.2)$$

Al discretizar (3.17) la integral en ρ pasa a ser una suma sobre los sitios i de la red radial. Una posible manera de discretizar la derivada en ρ es tomándola como la diferencia de la función en dos puntos consecutivos de la red. Definida así corresponderá a una derivada en el punto medio de los dos sitios. Entonces, omitiendo los subíndices l y n por un momento e identificando $m = k = 2\pi n/L$, el hamiltoniano discreto será

$$H = \frac{1}{2} \sum_i \tilde{\pi}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_i \left[(i + 1/2) \left(\frac{\tilde{\phi}_{i+1}}{\sqrt{i+1}} - \frac{\tilde{\phi}_i}{\sqrt{i}} \right)^2 + \frac{l^2}{i^2} \tilde{\phi}_i^2 + m^2 \tilde{\phi}_i^2 \right]. \quad (5.3)$$

Expandiendo el primer término que aparece dentro del corchete

$$(i + 1/2) \left(\frac{\tilde{\phi}_{i+1}^2}{i+1} + \frac{\tilde{\phi}_i^2}{i} - \frac{\tilde{\phi}_{i+1}\tilde{\phi}_i}{\sqrt{i(i+1)}} - \frac{\tilde{\phi}_i\tilde{\phi}_{i+1}}{\sqrt{i(i+1)}} \right), \quad (5.4)$$

se identifican fácilmente los elementos extradiagonales $K_{i+1i} = K_{ii+1}$ y una contribución en $(i+1/2)/i$ al siguiente elemento diagonal (K_{i+1i+1}). Entonces, salvo el primero, todos los elementos diagonales (K_{ii}) incluyen dos contribuciones: $(i+1/2)/i$ propia de la expansión (5.4) en el sitio i y otra, $(i-1+1/2)/i$ proveniente de la expansión en el sitio anterior. Sumadas $(i+1/2+i-1+1/2)/i = 2$. Mientras que al primer término diagonal (K_{11}) le corresponde $3/2$.

En conclusión, la matriz K correspondiente a (5.3) es

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{3}{2} + l^2 + m^2, \\ K_{ii} &= 2 + \frac{l^2}{i^2} + m^2, \\ K_{i+1i} &= K_{ii+1} = -\frac{i+1/2}{\sqrt{i(i+1)}}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Discretizar el hamiltoniano (4.26) que resulta de considerar el campo de Maxwell, es muy simple una vez que se tiene la versión discreta del campo escalar pues, después de eliminar el término de borde e identificar el potencial cuadrático (4.30), este último solo modifica los elementos diagonales de (5.5). Para este caso resulta entonces

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{3}{2} + l^2 + m^2 + \frac{m^4 - 2m^2l^2}{(l^2 + m^2)^2}, \\ K_{ii} &= 2 + \frac{l^2}{i^2} + m^2 + \frac{i^2m^4 - 2m^2l^2}{(l^2 + i^2m^2)^2}, \\ K_{i+1i} &= K_{ii+1} = -\frac{i+1/2}{\sqrt{i(i+1)}}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

A modo de verificar consistencia en los cálculos, se calculó numéricamente la entropía a partir de discretizar directamente el hamiltoniano (4.26) sin separar el término del potencial ni eliminar el término de borde. La matriz K que resulta en este caso es un tanto más compleja si la comparamos con las anteriormente expuestas

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{6(l^2 + m^2)}{4l^2 + 9m^2}, \\ K_{ii} &= \frac{l^2}{i^2} + m^2 \\ &\quad + \left(\frac{l^2}{i} + im^2 \right) \left[\frac{1}{(l^2/(i-1/2) + (i-1/2)m^2)} + \frac{2+4i}{4l^2 + (m+2im)^2} \right], \\ K_{i+1i} &= K_{ii+1} = -\frac{2(1+2i)\sqrt{\left(\frac{l^2}{i} + im^2\right)\left(\frac{l^2}{1+i} + (1+i)m^2\right)}}{4l^2 + (m+2im)^2}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

En este caso y todos los anteriores escribimos los únicos elementos no nulos de la matriz K .

5.2. Resultados para el campo escalar

Se calculó numéricamente la entropía para el campo escalar masivo en un disco siguiendo los pasos que se detallan en el Apéndice A. El cálculo se hizo sobre una red radial de 400 sitios, para 10 valores de masas equiespaciadas entre $1/15$ y $1/5$ en unidades del parámetro de la red. Dado que el desarrollo (2.10) para la entropía en el disco vale para mR grande, se consideraron radios del disco entre 60 y 260. Al tener en cuenta radios muy por encima de 260 comienzan a ser relevantes efectos infrarrojos consecuencia de la extensión finita de la red.

Para cada masa se ajustó la entropía en términos del tamaño del disco con el modelo

$$S = c_{(-1)}(m) \frac{1}{R} + c_0(m) + c_1(m)R. \quad (5.8)$$

Una vez determinados los coeficientes $c_1(m)$ y $c_{-1}(m)$ se expandieron en términos de la masa y se realizó un segundo ajuste. Las expansiones más estables y con residuos distribuidos normalmente resultaron ser

$$c_1(m) = c_1^{(-1)} \frac{1}{m} + c_1^{(0)} + c_1 m + c_1^{(2)} m^2 + c_1^{(3)} m^3, \quad (5.9)$$

$$c_{(-1)}(m) = c_{(-1)} \frac{1}{m} + c_{(-1)}^0 + c_{(-1)}^1 m + c_{(-1)}^{(2)} m^2 + c_{(-1)}^{(3)} m^3. \quad (5.10)$$

Los coeficientes c_1 y $c_{(-1)}$ de la expansión en potencias (2.10) se obtienen como los factores que acompañan a los términos lineal en m y $1/m$ en (5.9) y (5.10) respectivamente. Las figuras 5.1 y 5.2 muestran ajustes típicos para $c_1(m)$ y $c_{(-1)}(m)$ en conjunto con los residuos estandarizados.

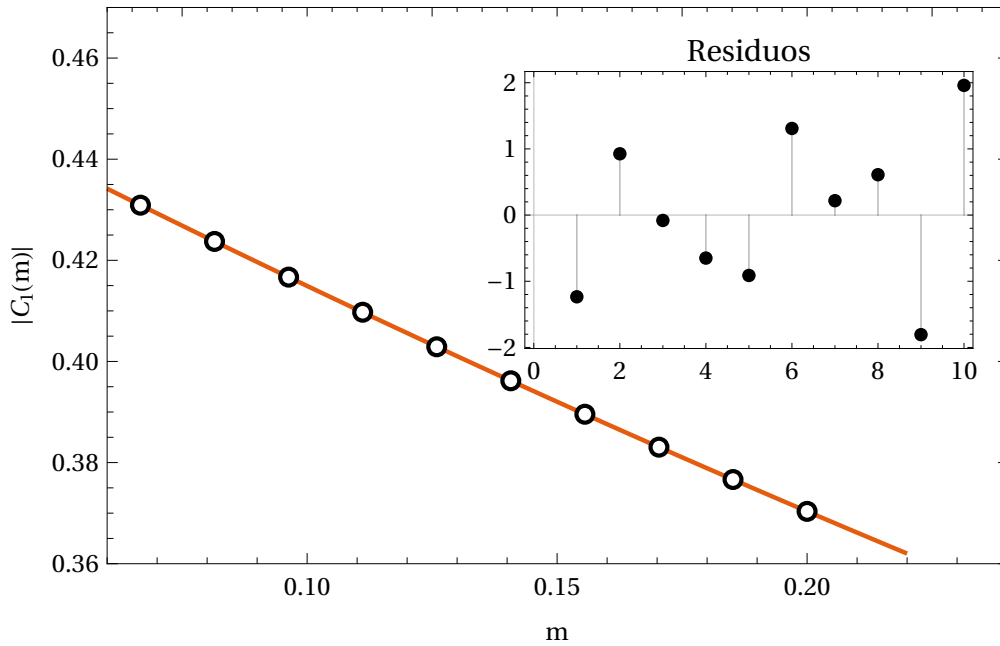


Figura 5.1: Los puntos corresponden al módulo del coeficiente $c_1(m)$ que acompaña al término lineal en R de la entropía de entrelazamiento del campo escalar en el disco. Estos coeficientes $c_1(m)$ fueron determinados ajustando la entropía para $120 < R < 180$. La línea sólida corresponde al mejor ajuste, del cual se extrajo el coeficiente $|c_1| = 0,523622$. Se incluyen los residuos estandarizados, cuya distribución indica la capacidad del modelo de ajuste para describir el conjunto de datos.

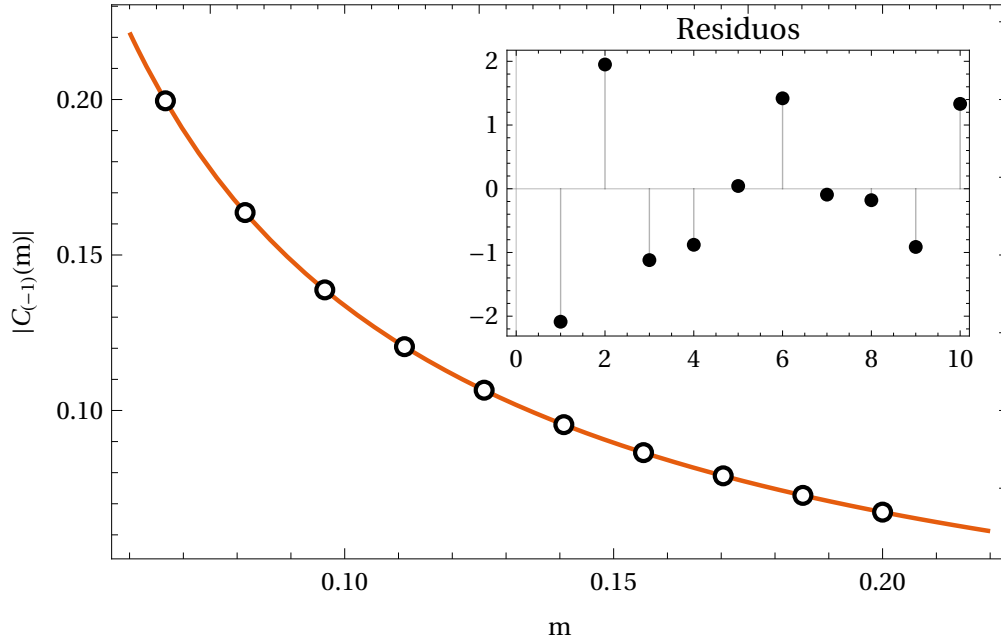


Figura 5.2: Los puntos corresponden al módulo del coeficiente $c_{(-1)}(m)$ que acompaña al término $1/R$ de la entropía de entrelazamiento del campo escalar en el disco. Estos coeficientes $c_{(-1)}(m)$ fueron determinados ajustando la entropía para $120 < R < 180$. La línea sólida corresponde al mejor ajuste, del cual se extrajo el coeficiente $|c_{(-1)}| = 0,0132529$. Se incluyen los residuos estandarizados, cuya distribución indica la capacidad del modelo de ajuste para describir el conjunto de datos.

Ahora bien, dado que los cálculos de estos coeficientes mejoran al aumentar mR , realizamos los ajustes del modelo (5.8) tomando intervalos de radios donde R es cada vez es más grande hasta alcanzar valores alrededor de 260, en lugar de ajustar con todos los radios entre 60 y 260. Exactamente lo que hicimos fue tomar intervalos entre R_{min} y $R_{max} = 3/2 R_{min}$, movimos R_{min} desde 60 y etiquetamos cada ajuste con el R_{min} empleado. Para el segundo ajuste de las ecuaciones (5.9) y (5.10) sí tomamos todos los puntos de masas que son solo 10. Los coeficientes $c_1(m)$ y $c_{(-1)}(m)$ obtenidos con este procedimiento muestran una tendencia asintótica a medida que crece el valor de los radios considerados. Como mejor estimación de los coeficientes tomamos estos valores asintóticos.

La manera de estimar los valores asintóticos de los coeficientes fue ajustar los datos de $|c_1|$ y $|c_{(-1)}|$ en función de R_{min} con

$$c(R_{min}) = c + \alpha R_{min}^{-\beta}, \quad (5.11)$$

donde c , α y β son los parámetros del ajuste. El parámetro c corresponde al valor asintótico de los coeficientes que queremos determinar. Las figuras 5.3 y 5.4 muestran los resultados de estos ajustes.

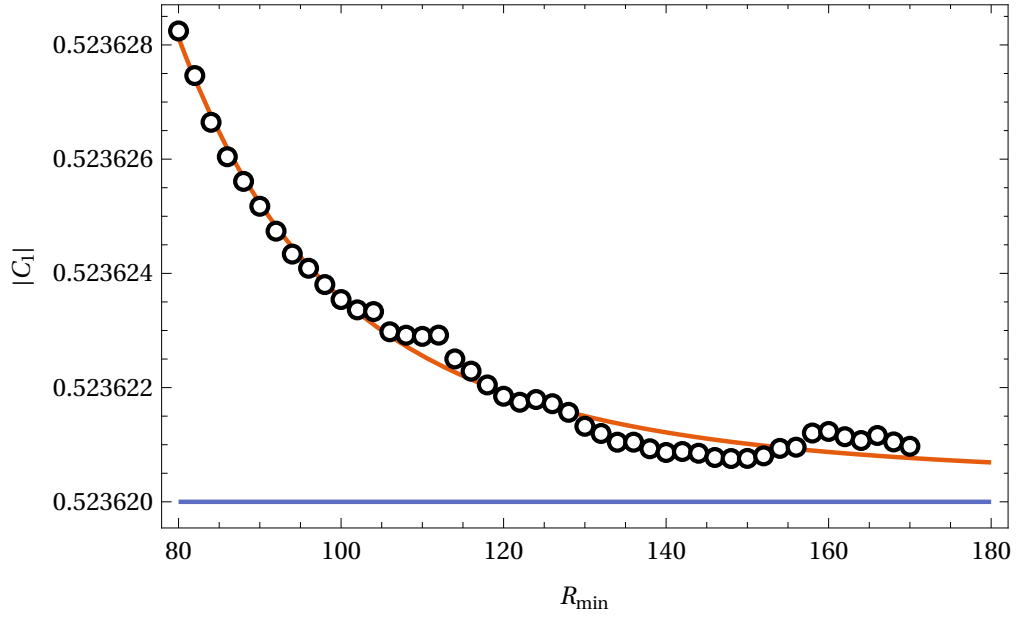


Figura 5.3: Los puntos corresponden al módulo del coeficiente c_1 que acompaña al término mR en el desarrollo de la entropía del campo escalar en el disco, calculados haciendo ajustes de la misma para radios del disco en el intervalo $R_{min} < R < 3/2 R_{min}$. La línea sólida corresponde al ajuste de estos puntos con la función (5.11) cuya asíntota tomamos como mejor estimación de $|c_1| = 0,523620$.

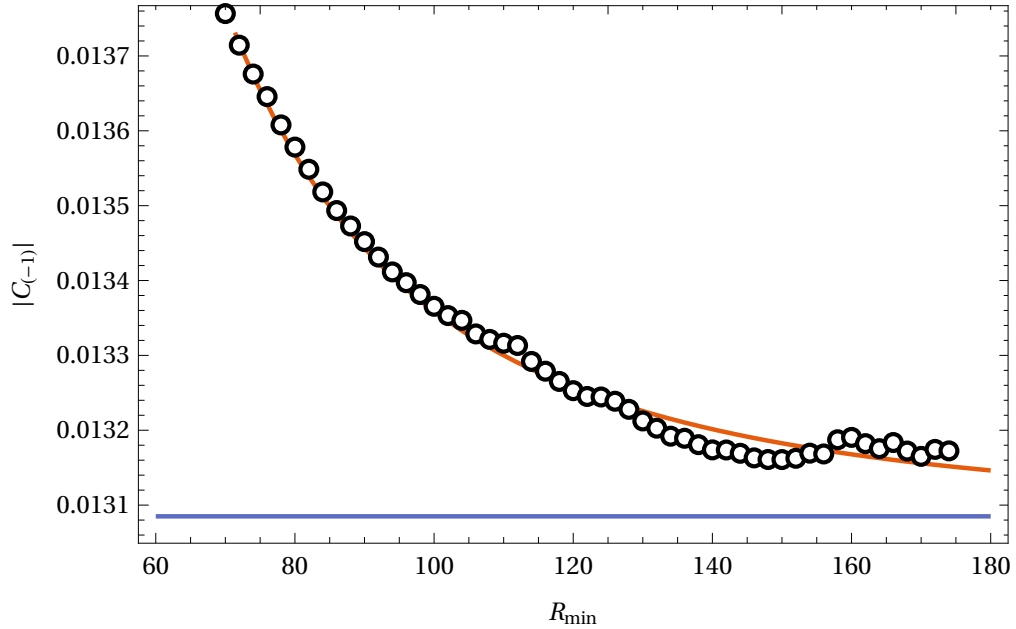


Figura 5.4: Los puntos corresponden al módulo del coeficiente $c_{(-1)}$ que acompaña al término $1/mR$ en el desarrollo de la entropía del campo escalar en el disco, calculados haciendo ajustes de la misma para radios del disco en el intervalo $R_{min} < R < 3/2 R_{min}$. La línea sólida corresponde al ajuste de estos puntos con la función (5.11) cuya asíntota tomamos como mejor estimación de $|c_{(-1)}| = 0,0130846$.

Se obtuvo:

$$c_1 = -0,52362 \sim -\frac{2\pi}{12}, \text{ con un error relativo del } 0,004\% \quad (5.12)$$

$$c_{(-1)} = -0,01308 \sim -\frac{\pi}{240}, \text{ con un error relativo del } 0,2\% \quad (5.13)$$

Los valores calculados numéricamente coinciden con los teóricos obtenidos en [1, 9] y mejora la precisión con que fueron determinados en [5].

5.3. Resultados para el campo de Maxwell

Repetimos el mismo procedimiento empleado para el cálculo de la entropía del campo escalar, pero utilizando como matriz K la dada por las expresiones (5.6). Ahora teniendo en cuenta que los resultados hay que multiplicarlos por dos, puesto que aparecen dos copias del escalar en el hamiltoniano de Maxwell (4.26).

Esta vez utilizamos una red de 500 sitios, los mismos valores de masas, radios desde 100 hasta 350. Por encima de este valor comienzan a apreciarse los efectos infrarrojos debidos al tamaño finito de la red. En los ajustes consecutivos, en función de R primero y m después, se emplearon los mismos modelos dados por las ecuaciones (5.8) a (5.10), verificando la estabilidad de los parámetros ante la supresión de algunos datos y normal distribución de los residuos. Las figuras 5.5 y 5.6 muestra ajustes típicos de $c_1(m)$ y $c_{(-1)}(m)$ acompañados de los residuos estandarizados.

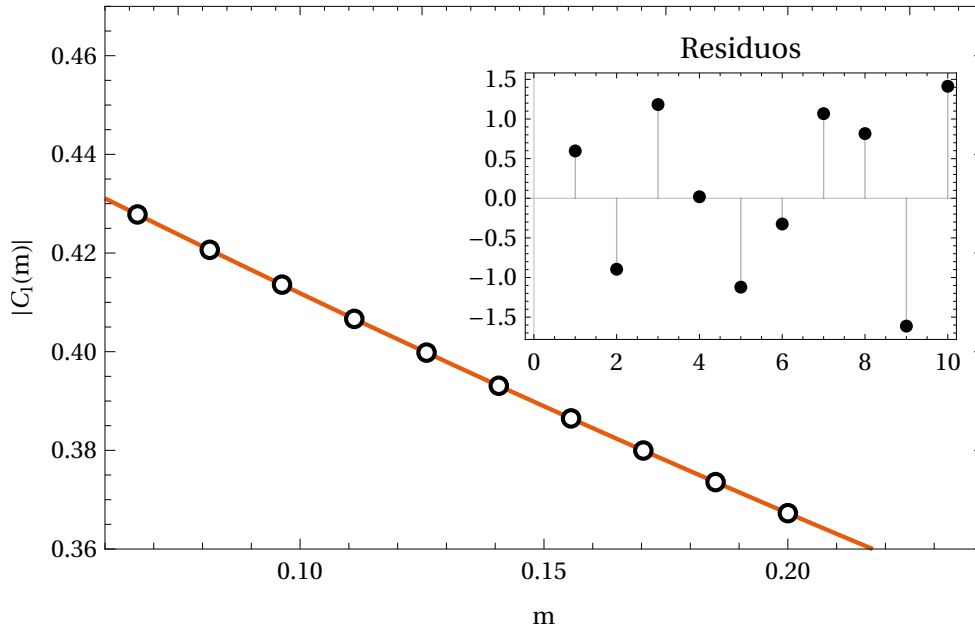


Figura 5.5: Los puntos corresponden al módulo del coeficiente $c_1(m)$ que acompaña al término lineal en R de la entropía de entrelazamiento del campo escalar con el potencial cuadrático (4.30) en el disco. Estos coeficientes $c_1(m)$ fueron determinados ajustando la entropía para $200 < R < 300$. La línea sólida corresponde al mejor ajuste, del cual se extrajo el coeficiente $|c_1| = 0,523621$ correspondiente a $R_{min} = 200$. Se incluyen los residuos estandarizados, cuya distribución indica la capacidad del modelo de ajuste para describir el conjunto de datos.

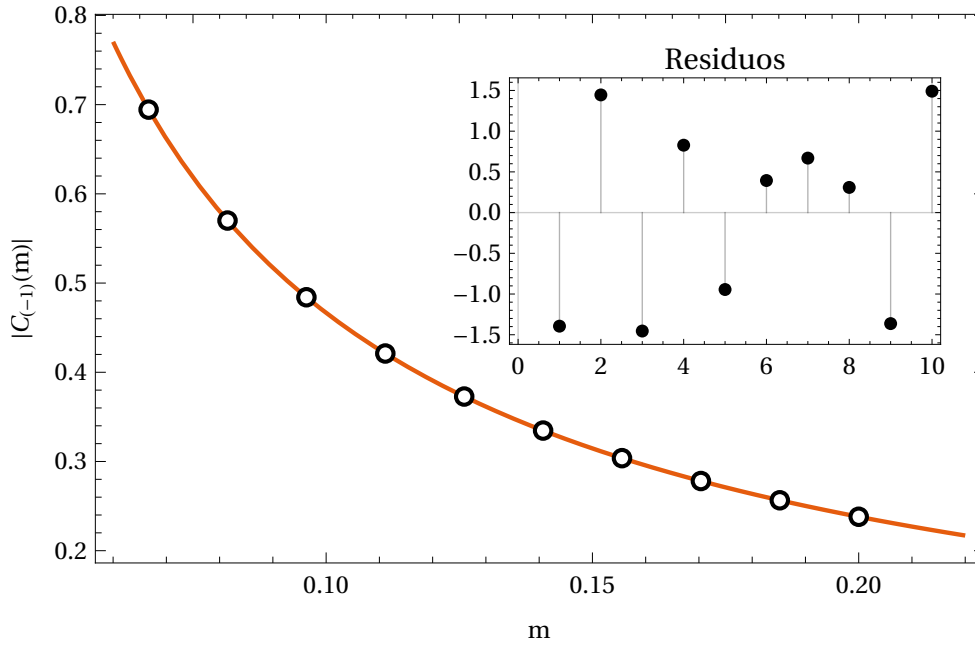


Figura 5.6: Los puntos corresponden al módulo del coeficiente $c_{(-1)}(m)$ que acompaña al término $1/R$ de la entropía de entrelazamiento del campo escalar con el potencial cuadrático (4.30) en el disco. Estos coeficientes $c_{(-1)}(m)$ fueron determinados ajustando la entropía para $200 < R < 300$. La línea sólida corresponde al mejor ajuste, del cual se extrajo el coeficiente $|c_{(-1)}| = 0,045855$ correspondiente a $R_{min} = 200$. Se incluyen los residuos estandarizados, cuya distribución indica la capacidad del modelo de ajuste para describir el conjunto de datos.

Al considerar intervalos de radios donde R aumenta progresivamente, se observa también la tendencia asintótica de los coeficientes c_1 y $c_{(-1)}$. Los mismos se determinaron de manera similar a la utilizada para caso del campo escalar libre; ajustando los datos de los valores de los coeficientes en función del R_{min} en el intervalo de radios empleado para calcularlos, con el modelo (5.11). Las figuras 5.7 y 5.8 muestran los resultados de estos ajustes.

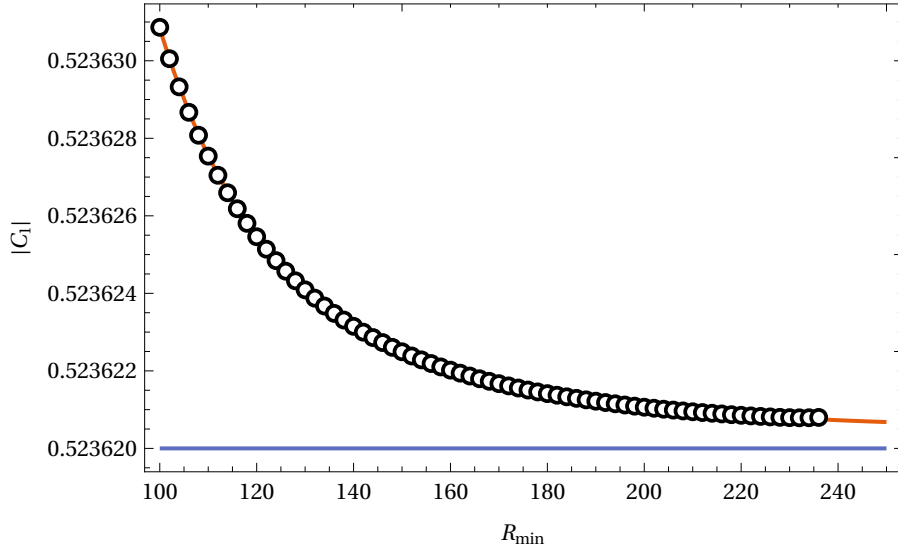


Figura 5.7: Los puntos corresponden al módulo del coeficiente c_1 que acompaña al término mR en el desarrollo de la entropía del campo escalar con el potencial (4.30) en el disco, calculados haciendo ajustes de la misma para radios del disco en el intervalo $R_{min} < R < 3/2 R_{min}$. La línea sólida corresponde al ajuste de estos puntos con la función (5.11) cuya asíntota tomamos como mejor estimación de $|c_1| = 0,523620$.

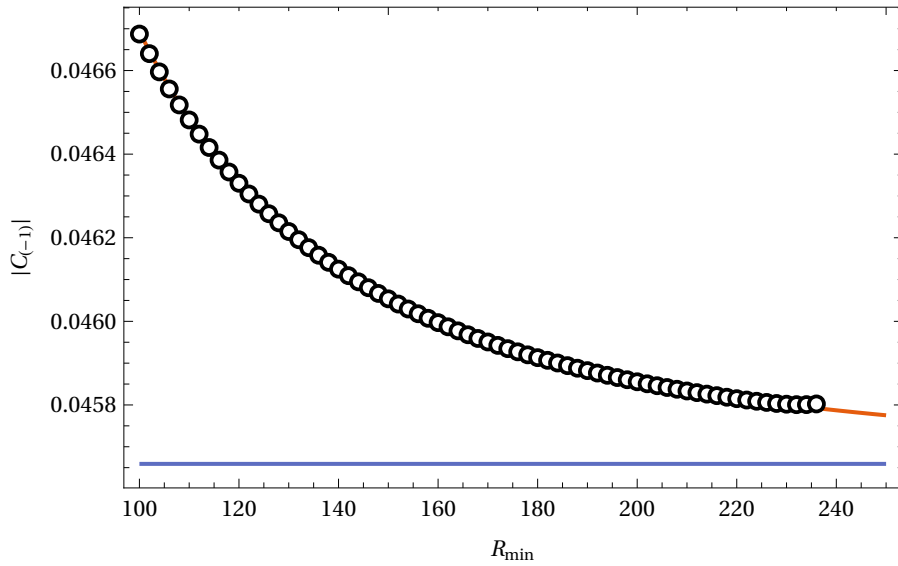


Figura 5.8: Los puntos corresponden al módulo del coeficiente $c_{(-1)}$ que acompaña al término $1/mR$ en el desarrollo de la entropía del campo escalar con el potencial (4.30) en el disco, calculados haciendo ajustes de la misma para radios del disco en el intervalo $R_{min} < R < 3/2 R_{min}$. La línea sólida corresponde al ajuste de estos puntos con la función (5.11) cuya asíntota tomamos como mejor estimación de $|c_{(-1)}| = 0,045659$.

El coeficiente c_1 , calculado para solo uno de los dos campos escalares en presencia del potencial (4.30) que componen el hamiltoniano (4.26), reporta el mismo valor ($0,52362 \sim 2\pi/12$) que en el caso de un campo escalar libre. Sin embargo, para nuestra sorpresa, el valor del coeficiente $c_{(-1)} = -0,045659$ resulta diferente al valor predicho por Solodukhin en [1], esto es $1/2 \times 12\pi/240 \sim 0,07854$.

Con el objetivo de verificar consistencia en los cálculos y descartar posibles contribuciones de términos de borde, computamos la entropía del campo de Maxwell utilizando

la matriz K dada por las expresiones (5.7). Los resultados obtenidos con ambas formas de discretizar el hamiltoniano del campo electromagnético son indistinguibles dentro de las cotas de errores numéricos. Las figuras 5.9 y 5.10 muestran los resultados de los ajustes que determinan los límites asintóticos de los cálculos de los coeficientes a distintos intervalos de radios.

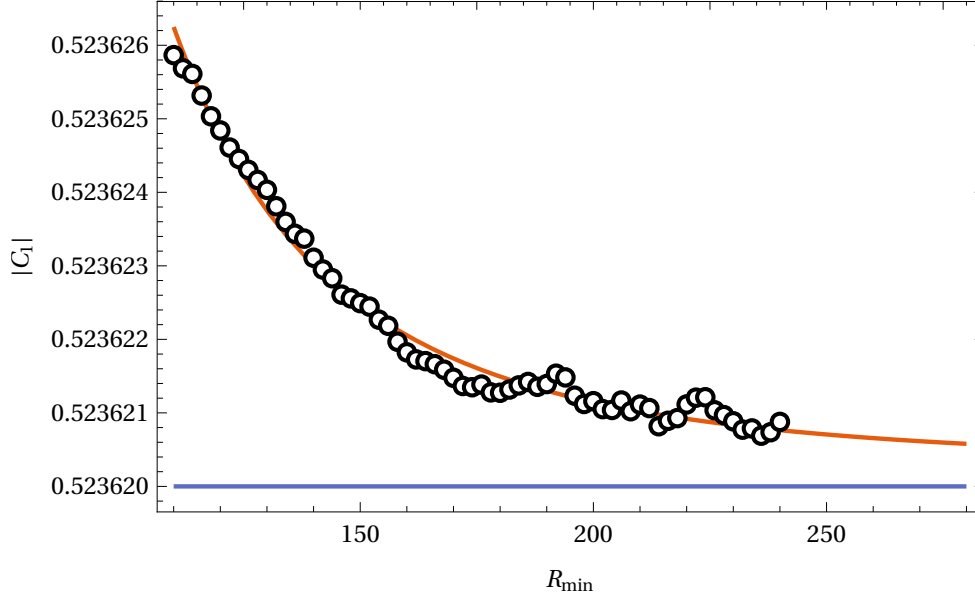


Figura 5.9: Los puntos corresponden al módulo del coeficiente c_1 que acompaña al término mR en el desarrollo de la entropía del campo escalar con el potencial (4.30) en el disco, cuyo hamiltoniano está escrito de la forma (4.26), haciendo ajustes de la entropía para radios del disco en el intervalo $R_{\min} < R < 3/2 R_{\min}$. La línea sólida corresponde al ajuste de estos puntos con la función (5.11) cuya asíntota tomamos como mejor estimación de $|c_1| = 0,523620$.

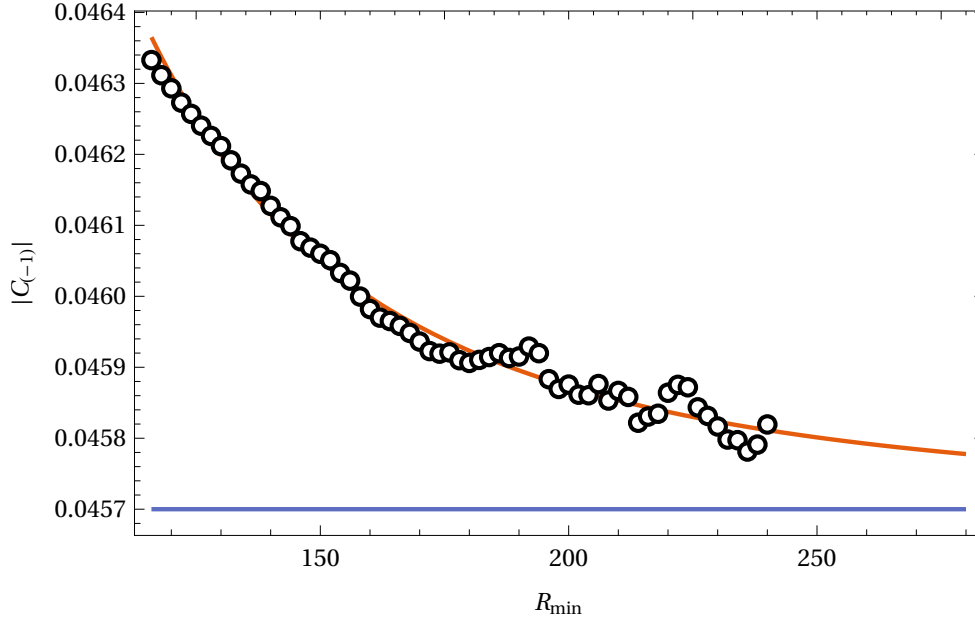


Figura 5.10: Los puntos corresponden al módulo del coeficiente $c_{(-1)}$ que acompaña al término $1/mR$ en el desarrollo de la entropía del campo escalar con el potencial (4.30) en el disco, cuyo hamiltoniano está escrito de la forma (4.26), haciendo ajustes de la entropía para radios del disco en el intervalo $R_{min} < R < 3/2 R_{min}$. La línea sólida corresponde al ajuste de estos puntos con la función (5.11) cuya asíntota tomamos como mejor estimación de $|c_{(-1)}| = 0,04571$.

Entonces, para el campo de Maxwell se obtuvo:

$$c_1 = -1,04724 \sim -2\frac{2\pi}{12}, \text{ con un error relativo del } 0,004\% \quad (5.14)$$

$$c_{(-1)} = -0,0914 \sim -7\frac{\pi}{240}, \text{ con un error relativo del } 0,3\% \quad (5.15)$$

De alguna forma, el potencial cuadrático extra (4.30) que aparece en el hamiltoniano de Maxwell incrementa el valor del coeficiente logarítmico de la entropía de entrelazamiento de los dos campos escalares que aparecen, pero no alcanza para aumentarlo en el factor 12 predicho por Solodukhin, sino que resulta ser apenas 7 veces el del escalar. Por otro lado el coeficiente c_1 no es afectado por la presencia de este potencial. Esto puede deberse al hecho de que el término lineal en R en el desarrollo (2.10) de la entropía es el más relevante en el límite infrarrojo, límite en el cual el potencial (4.30) se hace irrelevante.

Capítulo 6

Conclusiones

Los desarrollos analíticos permitieron arribar a una relación exacta entre el problema del campo de Maxwell en un cilindro en (3+1) dimensiones y el de un campo escalar no masivo en la misma región al tener en cuenta los hamiltonianos de estas teorías. La misma establece que el hamiltoniano del campo electromagnético es equivalente al de dos campos escalares independientes, no masivos en el cilindro y con un potencial cuadrático que emerge luego de compactar en la dirección longitudinal e integrar la coordenada angular. Para llegar a este resultado, partimos del hamiltoniano del campo electromagnético escrito en término de los campos físicos, las ecuaciones de Maxwell de vacío y los conmutadores entre \mathbf{E} y \mathbf{B} .

Analíticamente resulta difícil predecir el efecto que tiene el potencial cuadrático extra que aparece en el caso electromagnético sobre la entropía de un campo escalar. Entonces, la única solución posible es el cálculo numérico. Para ello empleamos el formalismo de “tiempo real”.

Primeramente, a modo de probar los algoritmos numéricos, se calcularon los coeficientes c_1 y $c_{(-1)}$ del desarrollo (5.8) de la entropía en el disco para el campo escalar libre, no masivo en el cilindro. Los resultados fueron concordantes con los predichos analíticamente en [1, 9] y se mejora la precisión numérica con que fueron determinados en [5]. Luego, se obtuvieron estos mismos coeficientes para el caso electromagnético empleando dos formas diferentes de tratar el hamiltoniano (4.26). En la primera, lo escribimos como el de un campo escalar más el potencial extra (4.30), lo cual significa modificar solo términos diagonales de la matriz K usada en los cálculos del escalar. En la segunda, consideramos directamente la expresión original (4.26) en su versión discreta, lo cual implica mantener términos de borde que no fueron tenidos en cuenta de la forma anterior. Ambas maneras de realizar los cálculos reportaron los mismos resultados para los coeficientes del desarrollo (2.10) de la entropía: $c_1 = -1,04724 \sim -2 \times 2\pi/12$ y $c_{(-1)} = -0,0914 \sim -7\pi/240$, lo cual nos indica que, tal como preveíamos, los términos de borde no contribuyen al coeficiente logarítmico.

El valor obtenido para el coeficiente c_1 , si consideramos sólo uno de los dos campos en que se separa el campo de Maxwell, resulta idéntico al caso del escalar libre. Esto era de esperarse ya que el potencial cuadrático (4.30) que aparece en el caso electromagnético es relevante para valores chicos del radio R del cilindro, justamente los valores donde el término $c_1 m R$ del desarrollo de la entropía es el menos significativo. Este resultado nos ofrece otro punto de respaldo para validar el valor del coeficiente $c_{(-1)} = -0,0914 \sim -7\pi/240$ que reportamos. El mismo difiere del predicho por Solodukhin en [1], $-12\pi/240 \sim -0,15708$.

Al igual que en el caso de la esfera [7] hay una discrepancia con las predicciones de Solodukhin para el campo de Maxwell. En ese caso se manifiesta explícitamente la ausencia del modo cero de los campos escalares que aparecen en el hamiltoniano, de manera que es muy claro el efecto que esta modificación causa en la entropía, ya que son conocidos exactamente los coeficientes logarítmicos para el campo escalar completo y el modo cero de un campo escalar. En el cilindro, el hamiltoniano del campo electromagnético también se puede escribir como el de dos escalares desacoplados modificados, pero en este caso la modificación aparece como un potencial cuadrático y no se conoce cómo conectarla analíticamente con el efecto que causa sobre la entropía de entrelazamiento.

La discordancia en el coeficiente logarítmico para el caso del campo de Maxwell, entendemos esta asociada a la definición de las álgebras locales. En el cálculo de la entropía de entrelazado, la noción de región se relaciona con la definición de un álgebra local asociada a la región y elegida a partir del álgebra completa de la teoría. Las álgebras locales pueden ser elegidas con o sin centro, conjunto de operadores que conmutan con todo el resto y que pertenecen al borde la región. La ambigüedad en la elección del álgebra local da lugar a su vez a ambigüedades en la entropía que han sido discutidas extensamente en la literatura para el caso general de campos de calibre. La contribución a la entropía debida a la presencia de un centro localizado en el borde es conocida como entropía clásica o de Shannon.

En los cálculos realizados, hemos considerado el álgebra local sin centro, es decir el caso de entropía puramente cuántica. La motivación del presente cálculo es el antecedente en la discordancia hallada para la misma situación en el caso de la esfera. En ambas geometrías, los coeficientes logarítmicos no se corresponden con las anomalías de traza del tensor de energía-impulso predichas analíticamente en [1]. Si bien, contamos con una justificación técnica, hasta el presente no contamos con una interpretación física que privilegie una u otra elección del álgebra local, quedando pendiente para trabajos futuros.

Apéndice

Apéndice A

Implementación numérica

Primero se crea la matriz $K(m, l)$ de 500×500 que depende del momento l , y la masa m , definida según las ecuaciones (5.5), (5.6) ó (5.7). A partir de $K(m, l)$, usando (2.51) y (2.52), se calculan las matrices de los correladores X_l y P_l en todo el espacio, es decir en los 500 sitios. Luego estos se reducen al radio del disco tomando las primeras R filas y R columnas. En los cálculos se usó $100 < R < 350$. Con los correladores reducidos X_l^R y P_l^R se calcula la matriz $C_l = \sqrt{X_l^R P_l^R}$ y sus autovalores ν_l^j , que dependen de R y m . Las contribuciones a la entropía vienen dadas por los términos

$$S_l(R, m) = \sum_{j=1}^R (\nu_l^j + 1/2) \ln(\nu_l^j + 1/2) - (\nu_l^j - 1/2) \ln(\nu_l^j - 1/2).$$

La entropía se calcula como

$$S(R, m) = S_0 + \sum_{l=1}^{l_{max}} 2S_l + \mathcal{O}(S_{l_{max}})$$

para cada radio y masa, siendo $\mathcal{O}(S_{l_{max}})$ una corrección debida los $l > l_{max} = 3000$. Para estimar $\mathcal{O}(S_{l_{max}})$ se ajusta

$$S_l = \frac{1}{l^2} + \frac{\ln(l)}{l^2} + \frac{1}{l^4} + \frac{\ln(l)}{l^4} + \frac{1}{l^6} + \frac{\ln(l)}{l^6} + \frac{1}{l^8} + \frac{\ln(l)}{l^8}$$

con algunos puntos calculados para l menores y mayores que l_{max} . Luego se suma numéricamente

$$\mathcal{O}(S_{l_{max}}) = \sum_{l=l_{max}+1}^{\infty} 2S_l.$$

Con los valores de $S(R, m)$ se realizaron ajustes a

$$S = c_{(-1)}(m) \frac{1}{R} + c_0(m) + c_1(m)R.$$

para cada masa, tomando intervalos entre R_{min} y $R_{max} = 3/2 R_{min}$ y variando R_{min} desde 100 hasta 230. Los parámetros de cada ajuste fueron etiquetados con el R_{min} correspondiente.

Luego, se realizó un segundo ajuste a

$$\begin{aligned}c_1(m) &= c_1^{(-1)} \frac{1}{m} + c_1^{(0)} + c_1 m + c_1^{(2)} m^2 + c_1^{(3)} m^3 , \\c_{(-1)}(m) &= c_{(-1)} \frac{1}{m} + c_{(-1)}^0 + c_{(-1)}^1 m + c_{(-1)}^{(2)} m^2 + c_{(-1)}^{(3)} m^3 .\end{aligned}$$

de los coeficientes obtenidos en el primero. De estos últimos ajustes se obtuvieron los coeficientes c_1 y $c_{(-1)}$ en los que estamos interesados. Los mismos vienen con la etiqueta del R_{min} utilizado en el primer ajuste. Finalmente consideramos como mejor estimación de estos parámetros el valor de la asíntota si suponemos una dependencia con R_{min} de la forma

$$c(R_{min}) = c + \alpha R_{min}^{-\beta}.$$

Bibliografía

- [1] S. N. Solodukhin, “Entanglement entropy, conformal invariance and extrinsic geometry,” *Phys. Lett. B* **665** (2008) 305–309, [arXiv:0802.3117 \[hep-th\]](#).
- [2] J. S. Dowker, “Entanglement entropy for even spheres,” [arXiv:1009.3854 \[hep-th\]](#).
- [3] J. S. Dowker, “Entanglement entropy for odd spheres,” [arXiv:1012.1548 \[hep-th\]](#).
- [4] H. Casini and M. Huerta, “Entanglement entropy for the n-sphere,” *Phys. Lett. B* **694** (2010) 167–171, [arXiv:1007.1813 \[hep-th\]](#).
- [5] M. Huerta, “Numerical determination of the entanglement entropy for free fields in the cylinder,” *Phys. Lett. B* **710** (2012) 691–696, [arXiv:1112.1277 \[hep-th\]](#).
- [6] H. Casini, M. Huerta, and R. C. Myers, “Towards a derivation of holographic entanglement entropy,” *JHEP* **1105** (2011) 036, [arXiv:1102.0440 \[hep-th\]](#).
- [7] H. Casini and M. Huerta, “Entanglement entropy of a maxwell field on the sphere,” *Phys. Rev. D* **93** (2016) 105031, [arXiv:1512.06182 \[hep-th\]](#).
- [8] H. Casini and M. Huerta, “Entanglement entropy in free quantum field theory,” *J. Phys. A* **42** (2009) 504007, [arXiv:0905.2562 \[hep-th\]](#).
- [9] M. P. Hertzberg and F. Wilczek, “Some calculable contributions to entanglement entropy,” *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011) 050404, [arXiv:1007.0993 \[hep-th\]](#).

Agradecimientos

A mi directora, Marina Huerta, por su sabia guía e infinita paciencia. Y a todos los profesores, compañeros, amigos y familiares que de una forma u otra, con sus consejos e ideas contribuyeron a que hoy alcance esta meta.